OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1.

Fie expresia $E(x)=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9},\ x\in\mathbb{R}.$

a) Determinaţi cardinalul mulţimii $A=\{n\in\mathbb{N}\,|\,E(\sqrt{n})=5\}$.

b) Fie $m\in\mathbb{R}$ valoarea minimă a expresiei $E(x)$. Determinaţi m şi mulţimea $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,E(x)=m\}$.

SUBIECTUL 2.

Determinaţi elementele mulţimii

$$S=\left\{(a,b,c,d)\,\middle|\,2a+3b+5c+7d\le 174-\frac{8}{a}-\frac{27}{b}-\frac{125}{c}-\frac{343}{d}\ ,\ cu\ \ a,b,c,d\in(0,\infty)\right\}.$$

SUBIECTUL 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile $AB=3a,\ BC=2a$ şi $AA'=a,\ a>0.$ Fie $M\in(AB), N\in(BC)$ astfel încât $AM=BN=a.$

a) Demonstraţi că dreptele $D'M$ şi MN sunt perpendiculare.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre planele $(D'DM)$ şi $(D'DN)$.

SUBIECTUL 4.

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră și M, N, P, Q proiecțiile vârfului V pe bisectoarele unghiurilor $V\hat{A}B, V\hat{B}C, V\hat{C}D$, respectiv $V\hat{D}A$. Să se arate că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

Notă:
Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 15.02.2015
Clasa a VIII-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

a) Avem $E(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-3|$. ……………………………..……..........**1p**

$E(\sqrt{n})=5 \Leftrightarrow \Big|\underbrace{\sqrt{n}+2}_{>0}\Big|+|\sqrt{n}-3|=5 \Leftrightarrow |\sqrt{n}-3|=3-\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}\le 3 \Leftrightarrow n\le 9$. ……………..**2p**

Dar $n\in\mathbf{N}$ şi deci $A=\{0,1,2,...,9\} \Rightarrow \mathrm{Card}(A)=10$. …………………………………........…...**1p**

b) Avem $E(x)=|x+2|+|x-3|=|x+2|+|3-x|\ge|x+2+3-x|=5, \forall x\in\mathbf{R}$. (1) ……………......**1p**

Cum $E(0)=5$ şi $E(x)\ge 5, \forall x\in\mathbf{R}$, valoarea minimă a expresiei $E(x)$ este $m=5$. ……..........**1p**

În inegalitatea (1) avem egalitate $E(x)=5 \Leftrightarrow (x+2)(3-x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-2;3]$.

Deci, $B=\{x\in\mathbf{R} \mid E(x)=5\} \Leftrightarrow B=[-2;3]$. ……………………………………………………...**1p**

Subiectul 2.

$2a+3b+5c+7d\le 174-\frac{8}{a}-\frac{27}{b}-\frac{125}{c}-\frac{343}{d} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)\le 174$ (1). ..……..…….....................**1p**

Avand in vedere ca $a,b,c,d\in(0,\infty)$, aplicand inegalitatea mediilor obtinem:

$2a+\frac{8}{a}\ge 2\sqrt{2a\cdot\frac{8}{a}}$ =8, cu egalitate pentru cazul când $2a=\frac{8}{a}$, $a^2=4, a=2$ …...................**1p**

$3b+\frac{27}{b}\ge 2\sqrt{3b\cdot\frac{27}{b}}$ =18, cu egalitate pentru cazul când $3b=\frac{27}{b}$, $b^2=9, b=3$….............**1p**

$5c+\frac{125}{c}\ge 2\sqrt{5c\cdot\frac{125}{c}}$ =50, cu egalitate pentru cazul când $5c=\frac{125}{c}$, $c^2=25, c=5$….......**1p**

$7d+\frac{343}{d}\ge 2\sqrt{7d\cdot\frac{343}{d}}$ =98, cu egalitate pentru cazul când $7d=\frac{343}{d}$, $d^2=49, d=7$ …....**1p**

Prin însumare găsim că:

$\left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)\ge 8+18+50+98=174$ (2). **1p**

Din (1) şi (2) rezultă $\left(2a+\frac{8}{a}\right)+\left(3b+\frac{27}{b}\right)+\left(5c+\frac{125}{c}\right)+\left(7d+\frac{343}{d}\right)=174$, iar egalitatea se realizează pentru $(a,b,c,d)=(2,3,5,7)$ ....…………...**1p**

Subiectul 3.

a) Cu teorema lui Pitagora, avem $DM=MN=a\sqrt{5}, DN=a\sqrt{10}$. Conform RTP obținem că ΔDMN este dreptunghic isoscel, cu $m(\sphericalangle DMN)=90^\circ$ (1) $\Rightarrow DM\perp MN$. ……………............................**2p**

Cu teorema celor trei perpendiculare, avem:

$D'D\perp(ABC), DM\perp MN, DM\subset(ABC), MN\subset(ABC) \Rightarrow D'M\perp MN$. ……...………....**2p**

b) Avem $D'D\perp(ABC), DM\subset(ABC), DN\subset(ABC) \Rightarrow D'D\perp DM, D'D\perp DN$. Obţinem apoi că $(D'DM)\cap(D'DN)=D'D$, $MD\perp D'D, MD\subset(D'DM), ND\perp D'D, ND\subset(D'DN) \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle((D'DM),(D'DN)))=m(\sphericalangle(MD,ND))=m(\sphericalangle MDN)$. ………………...……....**2p**

Dar conform (1), ΔDMN este dreptunghic isoscel, $m(\sphericalangle DMN)=90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle MDN)=45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle((D'DM),(D'DN)))=45^\circ$. ………………………………………....……….......**1p**

Subiectul 4.

În triunghiul VAB notăm AA_1 bisectoarea unghiului $V\hat{A}B$, $A_1 \in (VB)$ și $\{V_1\} = AB \cap VM$.

În triunghiul VAV_1 avem AM bisectoare și înălțime, deci triunghiul este isoscel, de unde rezultă că M este mijlocul lui $[VV_1]$. ………...………...**1p**

Analog se arată că N este mijlocul lui $[VV_2]$, P este mijlocul lui $[VV_3]$, Q este mijlocul lui $[VV_4]$, unde $\{V_2\} = BC \cap VN$, $\{V_3\} = CD \cap VP$, $\{V_4\} = DA \cap VQ$. …………..……..**1p**

În triunghiul VV_1V_2 , $[MN]$ este linie mijlocie, deci $MN \parallel V_1V_2$ și cum $V_1V_2 \subset (ABC)$, rezultă $MN \parallel (ABC)$ (1). …………..……...**1p**

Analog rezultă $NP \parallel (ABC)$ (2) și $PQ \parallel (ABC)$ (3). …………..……..**1p**

Din (1) și (2) rezultă $(MNP) \parallel (ABC)$ (4), iar din (2) și (3) rezultă $(NPQ) \parallel (ABC)$ (5) **1p**

Din (4) și (5) rezultă că planele (MNP) și (NPQ) sunt paralele sau coincid. **1p**

Dar cum $(MNP) \cap (NPQ) = NP$, rezultă că planele coincid, deci punctele M, N, P, Q sunt coplanare. …………..……...**1p**

<u>Notă</u> : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .