OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 2. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $I_2+3AB=2BA$.
Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.

Florin Nicolaescu, Balş

Problema 3. Se consideră şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ şi

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+\frac{n}{n+1}}\text{ , pentru orice } n\geq 1.$$

Arătaţi că $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 4. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det A=1$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\det(A^2-A+I_3)=0$;

b) $\det(A+I_3)=6$ şi $\det(A-I_3)=0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

Etapa locală – 16 februarie 2014

CLASA A XI-A

Problema 1. Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Pentru orice x cu $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, avem:

$$\begin{aligned}\frac{(\cos x)^{\cos x}-\cos 2x}{x^2} &= \frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{x^2}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\\ &= \cos x\cdot\frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}\cdot\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}+\frac{1-\cos 2x}{x^2}.\end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2,\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

şi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x\cdot\ln(\cos x)}-1}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\cos x}-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

Problema 2. Matricele $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relaţia $I_2+3AB=2BA$. Arătaţi că $\det(AB-BA)=0$.

Florin Nicolaescu

Soluţie. Din ipoteză rezultă că $I_2+AB=2(BA-AB)$ şi $I_2+BA=3(BA-AB)$. Prin urmare,

$$\det(I_2+AB)=4\det(BA-AB)\ \text{ şi }\ \det(I_2+BA)=9\det(BA-AB).\qquad(*)$$

Vom arăta că $\det(I_2+AB)=\det(I_2+BA)$. Pentru orice matrice $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi orice $x\in\mathbb{R}$, avem

$$f_M(x):=\det(xI_2+M)=\det M+TrM\cdot x+x^2.$$

Cum $\det(AB)=\det(BA)$ şi $Tr(AB)=Tr(BA)$, deducem că $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. În consecinţă, avem $f_{AB}(1)=f_{BA}(1)$, adică $\det(I_2+AB)=\det(I_2+BA)$.

Din relaţia $(*)$ rezultă că $\det(BA-AB)=0$, deci $\det(AB-BA)=0$.

Problema 3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$a_1=1 \text{ şi } a_{n+1}=\sqrt{a_n+\frac{n}{n+1}},\ (\forall)\,n\geq 1.$$

Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Prin inducţie se arată că

$$1\leq a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*$$

sau, de exemplu,

$$1\leq a_n<2,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*.$$

Avem $a_1=1$ şi $a_2=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}$, deci $a_1<a_2$. În ipoteza $a_{n-1}<a_n$, rezultă că

$$a_{n-1}+\frac{n-1}{n}<a_{n-1}+\frac{n}{n+1}<a_n+\frac{n}{n+1},$$

şi, în consecinţă, $a_n < a_{n+1}$. Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

Fiind crescător şi mărginit superior, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci $a = \sqrt{a+1}$ ($a > 1$), de unde obţinem $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 1$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$;
b) $\det(A + I_3) = 6$ şi $\det(A - I_3) = 0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

Soluţie. Polinomul caracteristic al matricei A are forma

$$f_A(x) = \det(xI_3 - A) = x^3 + ax^2 + bx - 1.$$

Deoarece $A^2 - A + I_3 = (A - \omega I_3)(A - \overline{\omega} I_3)$, unde $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = -1$, rezultă că

$$\det\left(A^2 - A + I_3\right) = \left|\det(A - \omega I_3)\right|^2 = \left|f_A(\omega)\right|^2. \qquad (*)$$

($\Rightarrow$) Dacă $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$, atunci $f_A(\omega) = 0$, de unde obţinem $a = -2$ şi $b = 2$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Prin urmare, $\det(A + I_3) = -f_A(-1) = 6$ şi $\det(A - I_3) = -f_A(1) = 0$.

($\Leftarrow$) Conform ipotezei, avem $f_A(-1) = -6$ şi $f_A(1) = 0$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Cum $f_A(\omega) = 0$, din relaţia $(*)$ deducem că $\det\left(A^2 - A + I_3\right) = 0$.