



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE  
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU  
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică  
"Vrănceanu – Procopiu"

14 decembrie 2024

MATEMATICĂ

XII

**Problema I (10 puncte)**

Determinați funcția  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$ , știind că există o primitivă  $F$  a sa astfel încât

$$f(x) = F(x) - F\left(\frac{ab}{x}\right), \forall x \in [a, b].$$

**Problema a II-a (10 puncte)**

- a) Să se demonstreze că există o singură mulțime nevidă de numere complexe nenule  $A$  cu proprietățile:  $\text{Card } A = 6$  și  $x \cdot y \in A, \forall x, y \in A$ .
- b) Să se demonstreze că orice submulțime nevidă finită care este parte stabilă a unui grup abelian este grup comutativ în raport cu operația indusă.
- c) Fie  $G$  o mulțime nevidă de numere complexe nenule cu proprietățile:  $\text{Card } G = 2024$  și  $x \cdot y \in G, \forall x, y \in G$ . Demonstrați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian izomorf cu  $(\mathbb{Z}_{2024}, +)$ .

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe câte o foaie separată, care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.