OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a,b,c \in R$. Demonstrați că

$$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2=4(a^2+b^2+c^2).$$

b) Să se demonstreze că numărul $A=22^{22}+44^{44}+66^{66}$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale nenule pătrate perfecte.

2. Determinați mulțimea $I=(-\infty;a]\cap[a^{-1};\infty)$, $a\in\mathbb{R}$.

3. Fie M un punct exterior planului trapezului $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, iar E, F proiecţiile lui pe dreptele AD, respectiv BC.

a) Demonstraţi că $(MEF) \perp (ABC)$;

b) Dacă distanţele de la M la bazele trapezului sunt de $6\sqrt{3}\,cm$, iar măsura diedrului format de planele (MAD) și (MBC) este de 60^0, calculaţi distanţa de la M la planul (ABD).

4. Se consideră cubul ABCDMNPQ cu lungimea muchiei egală cu 5. Planul (ANQ) intersectează planele (MBC), (MCD), (MDB) după dreptele d_1, d_2, respectiv d_3.

a) Arătați că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Demonstrați că aria triunghiului format de cele trei drepte este mai mică decât 2.

Notă

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu).*
- *Timp de lucru: 3 ore*

Soluţii clasa a VIII-a:

1. a) Prin calcul avem:

$$(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2=$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc\right)+$$

$$+\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc\right)+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)=$$

$$=4\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

b)

$$A=22^{22}+44^{44}+66^{66}=4\left(2^{20}\cdot 11^{22}+2^{86}\cdot 11^{44}+2^{64}\cdot 33^{66}\right)=4\left[\left(2^{10}\cdot 11^{11}\right)^2+\left(2^{43}\cdot 11^{22}\right)^2+\left(2^{32}\cdot 33^{33}\right)^2\right]=$$

$$=(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2$$

unde $a=2^{10}\cdot 11^{11}, b=2^{43}\cdot 11^{22}, c=2^{32}\cdot 33^{33}$.

2. Condiția de existență: $a \neq 0$;

$a=a^{-1} \Longrightarrow a=\pm 1$.

Cazul I

Dacă $a \in (-\infty;-1) \Longrightarrow I=(-\infty;-1) \cap (-1;\infty) \Longrightarrow I=\emptyset$;

Cazul II

Dacă $a \in (-1;0) \Longrightarrow I=(-\infty;a]\cap\left[a^{-1};\infty\right)=\left[a^{-1};a\right]$;

Cazul III

Dacă $a \in (0;1) \Longrightarrow I=\emptyset$;

Cazul IV

Dacă $a \in (1;\infty) \Longrightarrow I=(-\infty;a]\cap\left[a^{-1};\infty\right)=\left[a^{-1};a\right]$;

Cazul V

Dacă $a=-1 \Longrightarrow I=\{-1\}$;

Cazul VI

Dacă $a=1 \Longrightarrow I=\{1\}$;

3. a) Fie $MO \perp (ABCD)$. Cum $ME \perp AD$ rezultă conform Teoremei celor 3 perpendiculare că $OE \perp AD$ (1).

Din $MO \perp (ABCD)$ și $MF \perp BC$ rezultă conform T.3.⊥ că $OF \perp BC$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că E, O, F coliniare. Deci $MO \subset (MEF)$,

$$MO \perp (ABC) \Rightarrow (MEF) \perp (ABC).$$

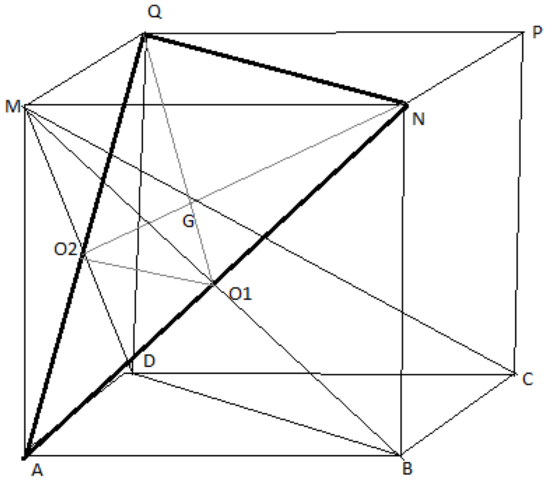
b)Notăm $MN=(MAD)\cap(MBC)$. Dacă prin două drepte paralele trec două plane care se intersectează după o dreaptă MN, atunci

$MN \parallel AD$ și $MN \parallel BC$;

$ME \perp AD, MN \parallel AD$ deci $EM \perp MN$.

$MF \perp BC, MN \parallel BC$, deci $MF \perp MN$, rezultă $\sphericalangle EMF$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MAD) și (MBC).
$\triangle MEF$ este triunghi isoscel cu un unghi de 60^0, rezultă că $\triangle MEF$ este echilateral cu latura de $6\sqrt{3}\ cm$. Deci $d(M, ABD) = MO = 9\ cm$.

4.



a) Fie O_1 centrul feței ABNM și O_2 centrul feței ADQM.

$MQ // BC \Rightarrow Q \in (MBC)$, $Q \in (ANQ)$ deci $Q \in (MBC) \cap (ANQ) (1)$.

$O_1 \in MB, MB \subset (MBC) \Rightarrow O_1 \in (MBC); O_1 \in AN, AN \subset (ANQ) \Rightarrow O_1 \in (ANQ)$, deci $O_1 \in (MBC) \cap (ANQ) (2)$.

Din (1) și (2) rezultă $(MBC) \cap (ANQ) = QO_1 = d_1$.

$MN // CD \Rightarrow N \in (MCD)$, $N \in (ANQ)$ deci $N \in (MCD) \cap (ANQ) (3)$.

$O_2 \in MD, MD \subset (MCD) \Rightarrow O_2 \in (MCD); O_2 \in AQ, AQ \subset (ANQ) \Rightarrow O_2 \in (ANQ)$, deci $O_2 \in (MCD) \cap (ANQ) (4)$.

Din (3) și (4) rezultă $(MCD) \cap (ANQ) = NO_2 = d_2$.

$O_1 \in MB, MB \subset (MDB) \Rightarrow O_1 \in (MDB)$; $O_1 \in AN, AN \subset (ANQ) \Rightarrow O_1 \in (ANQ)$, deci $O_1 \in (MDB) \cap (ANQ) (5)$.

$O_2 \in MD, MD \subset (MDB) \Rightarrow O_2 \in (MDB)$; $O_2 \in AQ, AQ \subset (ANQ) \Rightarrow O_2 \in (ANQ)$, deci $O_2 \in (MDB) \cap (ANQ) (6)$.

Din (5) și (6) rezultă $(MDB) \cap (ANQ) = O_1O_2 = d_3$.

În triunghiul ANQ, d_1 și d_2 sunt mediane, iar $[O_1O_2]$ este linie mijlocie, deci d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Triunghiul ANQ este echilateral cu latura de $5\sqrt{2}\ cm$. Fie $QO_1 \cap NO_2 = \{G\}$. Din $O_1O_2 \parallel NQ$ rezultă:

$$A_{\Delta O_1O_2G} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta QNG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ANQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(5\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{24} < 2.$$

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
a) $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$	1p
$(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$	1p
$(-a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$	1p
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	1p
Finalizare	1p
b) $A=4\left[\left(2^{10}\cdot 11^{11}\right)^2+\left(2^{43}\cdot 11^{22}\right)^2+\left(2^{32}\cdot 33^{33}\right)^2\right]$	2p
$A=(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a+b+c)^2$ unde $a=2^{10}\cdot 11^{11}, b=2^{43}\cdot 11^{22}, c=2^{32}\cdot 33^{33}$	2 p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
Condiția de existență	1 p
$a=a^{-1} \Rightarrow a=\pm 1$	2 p
Cazul I	1p
Cazul II	1p
Cazul III	1p
Cazul IV	1p
Cazul V	1p
Cazul VI	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
a)$OE \perp BC$(T.3. $\perp$)	1p
$OF \perp BC$(T.3. $\perp$)	1p
E, O, F coliniare	1p
$(MEF) \perp (ABC)$	1p
$b)$ $MN \parallel AD$ și $MN \parallel BC$	1p
$ME \perp AD, MN \parallel AD$ deci $EM \perp MN$	1p
$MF \perp BC, MN \parallel BC$ deci $MF \perp MN$	1p
$\sphericalangle EMF$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MAD) și (MBC)	1p
$d(M, ABD) = MO = 9cm$	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
a) $(MBC)\cap(ANQ)=QO_1=d_1, O_1$ centrul feței $ABNM$	1p
$(MCD)\cap(ANQ)=NO_2=d_2, O_2$ centrul feței $ADQM$	1 p
$(MDB)\cap(ANQ)=O_1O_2=d_3$	1p
În triunghiul ANQ, d_1 și d_2 sunt mediane, iar $[O_1O_2]$ este linie mijlocie, deci d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.	1p
b) $A_{\Delta O_1O_2G}=\frac{1}{4}\cdot A_{\Delta QNG}$, unde $QO_1\cap NO_2=\{G\}$	2p
$A_{\Delta O_1O_2G}=\frac{25\sqrt{3}}{24}\ cm$	2p
$\frac{25\sqrt{3}}{24}<2$	1p
TOTAL	**10p**