Societatea de Ştiinţe Matematice din România - regiunea sud-vest
Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 15 mai 2021

Clasa a V-a

Timp de lucru 180 de minute
Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este corect.

1. Suma tuturor numerelor naturale mai mici sau egale cu 100, dar nedivizibile cu 10, este egală cu

- **A.** 5050
- **B.** 4950
- **C.** 4050
- **D.** 4500
- **E.** 5000

Răspuns: **D**
Indicaţie: Avem $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 = 5050$ şi $10 + 20 + ... + 90 + 100 = 550$, deci rezultatul este $5050 - 550 = 4500$.

2. Un număr natural format din cel puţin două cifre se numeşte *palindrom* dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu 22, 343, 5115 sau 3333 sunt palindroame. Câte palindroame mai mici decât 10000 există?

- **A.** 90
- **B.** 99
- **C.** 189
- **D.** 243
- **E.** 111

Răspuns: **C**
Indicaţie: Sunt 9 palindroame două cifre, 90 cu trei cifre şi 90 cu patru cifre, deci 189 în total.

3. Ceasul din piaţa centrală a oraşului are un defect şi avansează câte 5 minute la fiecare oră. În fiecare zi, la ora 8.00, ceasornicarul vine şi reglează ceasul şi îl pune să arate ora exactă. În data de 7 mai 2021, la ora 8.00, ceasornicarul a venit şi a reglat ceasul. În data de 8 mai 2021, tot la ora 8.00 ceasornicarul a venit şi a observat că ceasul este oprit şi arată ora 3.30. De cât timp nu mai funcţionează acest ceas? (Ceasul indică timpul folosind afişaj numeric, începând cu ora 00.00 şi terminând cu 23.59, apoi reia de la 00.00.)

- **A.** 4 ore şi 30 minute
- **B.** 6 ore
- **C.** 3 ore şi 30 minute
- **D.** 8 ore
- **E.** 4 ore

Răspuns: **B**
Indicaţie: Ceasul avansează 30 minute la 6 ore, deci arată 14.30 în loc de 14, 21 în loc de 20 şi 3.30 în loc de 2.00. Aşadar s-a oprit la 2.00, deci de 6 ore.

4. Numărul natural n din egalitatea $2^{2020} + 2^{2023} = 36 \cdot 2^n$ este:

- **A.** 2022
- **B.** 2021

C. 2020
D. 2019
E. 2018
Răspuns: **E**
Indicaţie: Avem $2^{2020} + 2^{2023} = 2^{2020} \cdot 9 = 36 \cdot 2^{2018}$, deci $n = 2018$.

5. Un număr natural se numeşte *olimpic* dacă este format din patru cifre a căror sumă este egală cu 11. De exemplu numerele 3125 sau 4412 sunt *olimpice*. Diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr *olimpic* este egală cu:
A. 7992
B. 8082
C. 8091
D. 8181
E. Alt răspuns
Răspuns: **D**
Indicaţie: Cel mai mare număr olimpic este 9200 iar cel mai mic este 1019, deci diferenţa este 8181.

6. Numerele naturale $x_1, x_2, ..., x_{20}$ dau resturi diferite la împărţirea cu 21. Suma celor 20 de resturi astfel obţinute este egală cu 193. Printre cele 20 resturi obţinute nu se regăseşte numărul
A. 17
B. 7
C. 13
D. 3
E. Nu se poate determina cu exactitate
Răspuns: **A**
Indicaţie: Suma tuturor celor 21 de resturi la împărţirea cu 21 ar fi 210. Cum $210 - 193 = 17$, rezultă că nu există restul 17.

7. Pe şosea, traseul Timişoara-Deva-Bucureşti are 550 km, dintre care 150 km de la Timişoara la Deva. Dimineaţa pleacă, simultan pe acest traseu, spre Bucureşti, un automobil din Timişoara şi un camion din Deva. Automobilul parcuge 120 km într-o oră, iar camionul 70 km într-o oră. La ce distanţă de Bucureşti automobilul va ajunge camionul?
A. 220 km
B. 210 km
C. 200 km
D. 190 km
E. 180 km
Răspuns: **D**
Indicaţie: Automobilul recuperează 50 km într-o oră, deci are nevoie de 3 ore să ajungă camionul. În acest timp face 360 km, adică este la 190 km de Bucureşti.

8. La un banchet au fost prezenţi băieţi şi fete, 38 în total. Marius a adus flori pentru 5 fete, Radu pentru 6 fete, Şerban a adus flori pentru 7 fete şi aşa mai departe, ultimul băiat a adus flori pentru toate fetele. Numărul fetelor care au participat la acest banchet este egal cu
A. 15
B. 17
C. 19
D. 23
E. 21
Răspuns: **E**

Indicaţie: Al n-lea băiat a adus $38 - n$ flori. Atunci $38 - n - n = 4$, de unde $n = 17$. Atunci sunt 21 fete

9. La un concurs de matematică au participat 40 de elevi. dintre aceştia 25 au rezolvat prima problemă, 30 au rezolvat a doua problemă, 35 au rezolvat a treia problemă, iar 33 au rezolvat a patra problemă. Despre numărul de elevi care au rezolvat toate cele patru probleme putem spune că este

- **A.** Exact 25
- **B.** 0
- **C.** Cel puţin egal cu 3
- **D.** Cel mult egal cu 2
- **E.** Exact 1

Răspuns: **C**

Indicaţie: Minim 15 au rezolvat primele două probleme, minim 10 pe primele trei şi minim 3 pe toate patru.

10. La un meci de fotbal, echipa câştigătoare primeşte 3 puncte, iar cea învinsă primeşte 0 puncte. Dacă meciul se termină egal, fiecare echipă primeşte câte 1 punct. Cu aceste reguli de punctaj se organizează un turneu la care participă patru echipe, fiecare echipă jucând câte două meciuri cu fiecare dintre celelalte trei. La final se realizează un clasament în funcţie de punctajul acumulat de fiecare echipă. Dacă suma tuturor punctelor acumulate de către cele 4 echipe este 32 puncte, determinaţi numărul de meciuri încheiate la egalitate.

- **A.** 8
- **B.** 0
- **C.** 6
- **D.** 2
- **E.** 4

Răspuns: **E**

Indicaţie: Sunt 12 meciuri, deci maxim 36 puncte. La egal se pierde un punct. Sunt 4 puncte diferenţă, deci patru meciuri egale.

11. Folosind o singură dată cifra 5 şi o singură dată cifra 3, precum şi una singură dintre operaţiile adunare, scădere, înmulţire, ridicare la putere, cel mai mare rezultat pe care îl putem obţine este:

- **A.** 8
- **B.** 125
- **C.** 53
- **D.** 625
- **E.** Alt răspuns

Răspuns: **E**

Indicaţie: Cel mai mare este $3^5 = 243$.

12. Restul împărţirii numărului $N = 14^{27} + 27^{40} + 40^{14}$ la 13 este egal cu:

- **A.** 3
- **B.** 1
- **C.** 0
- **D.** 11
- **E.** 9

Răspuns: **A**

Indicaţie: Fiecare număr este de forma $M_{13} + 1$ deci restul va fi 3.

13. Cinci turişti au plecat în excursie în Turcia de unde au cumpărat plăcuţe de aur. Plăcuţele au fie 8 g, fie 20 g. La revenirea în ţară au fost întrebaţi la vamă despre cantitatea de aur pe care o deţin.

Primul a spus că are 1240 g, al doilea 432 g, al treilea 896 g, al patrulea 538 g şi al cincilea 1284 g. Vameşii au fost atenţi şi au realizat imediat că unul dintre turişti cu siguranţă minte şi i-au confiscat aurul. Care este turistul mincinos?

A. Primul
B. Al doilea
C. Al treilea
D. Al patrulea
E. Al cincilea

Răspuns: **D**

Indicaţie: Deoarece plăcutele au 8 g sau 20 g, deducem că obligatoriu cantitatea de aur trebuie să se dividă cu 4. Cum 538 nu se divide cu 4, deducem că turistul al patrulea era cel mincinos.

14. Câte numere naturale de patru cifre au produsul cifrelor egal cu 30?

A. 24
B. 6
C. 28
D. 36
E. 30

Răspuns: **D**

Indicaţie: Avem $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6$. Sunt 24 numere formate cu cifrele 1,2,3,5 şi 12 numere formate cu cifrele 1,1,5,6, deci în total 36.

15. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ satisfac egalitatea $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 44$?

A. 10
B. 8
C. 5
D. 3
E. 1

Răspuns: **D**

Indicaţie: Ipoteza conduce la $a + b + c = 4$, cu $a, b, c \neq 0$. Avem în total 3 numere, adică: 211, 121, 112.

16. Patru kg mere, 5 kg pere şi 12 nuci costă 35 lei. Şase kg mere, 2 kg pere şi 18 nuci costă 36 lei. Care este preţul unui kg de pere?

A. 3 lei
B. 2 lei
C. 1 leu
D. 4 lei
E. 5 lei

Răspuns: **A**

Indicaţie: Din prima informaţie obţinem că 12 kg mere, 15 kg pere şi 36 nuci costă 105 lei, iar din a doua obţinem 12 kg mere, 4 kg pere şi 36 nuci costă 72 lei. Diferenţa de 33 lei provin de la 11 kg pere, deci costul unui kg este 3 lei.

17. Câte perechi de numere naturale prime (x, y) verifică relaţia $3x + 5y = 1621$?

A. 5
B. 3
C. 2
D. 1
E. 0

Răspuns: **E**

Indicaţie: Evident x, y nu pot fi simultan impare, deci unul dintre ele este par. Dacă $x = 2$ obţinem $y = 323 = 17 \cdot 19$, iar dacă $y = 0$ obţinem $x = 537 = 3 \cdot 179$. Prin urmare nu există numere care să corespundă cerinţei.

18. Patru cercetători, pe nume Bill, Cash, Don şi Max, trebuie să treacă dintr-o parte în cealaltă a unui tunel. Din păcate drumul este foarte întunecat şi nu au la dispoziţie decât o lanternă. Mai mult, prin tunel nu pot circula simultan decât doi oameni şi obligatoriu având lanterna la ei. Atunci stabilesc să meargă câte doi, iar apoi unul se reîntoarce cu lanterna, apoi merg iar doi prin tunel, iar unul se întoarce şi care îl aduce şi pe cel de la patrulea în cealaltă parte a tunelului. Din păcate nu merg la fel de repede, iar când merg câte doi se vor deplasa în ritmul celui care se mişca mai încet. Bill poate parcurge tunelul în 2 minute, Cash în 4 minute, Don în 8 minute şi Max în 20 minute deoarece este accidentat. Care este timpul minim necesar pentru ca toţi cei patru cercetători să ajungă cu bine în cealaltă parte a tunelului.

A. 36 minute
B. 38 minute
C. 34 minute
D. 40 minute
E. 32 minute

Răspuns: **C**

Indicaţie: Merg Bill cu Cash, se întoarce Bill, apoi Don cu Max, se întoarce Cash şi la final Bill cu Cash. În total $4 + 2 + 20 + 4 + 4 = 34$ minute.

19. În oraşul Timişoara, pe o stradă se găsesc cinci case numerotate în ordine cu $11, 12, 13, 14, 15$. Pe această stradă locuiesc un român, un maghiar, un german, un sârb şi un croat. Se ştie că românul are număr impar la casă, cu cifre diferite, iar maghiarul are număr divizibil cu 3. De asemenea, germanul stă la una din primele două case de pe stradă, iar sârbul sigur nu locuieşte la una dintre ultimele două case. Care este numărul casei în care locuieşte croatul?

A. 11
B. 12
C. 13
D. 14
E. 15

Răspuns: **D**

Indicaţie: Dacă românul stă la 13, sârbul şi germanul sunt la 11 şi 12, deci maghiarul la stă 15 şi atunci croatul la 14. Dacă românul stă la 15, atunci maghiarul este la 12, germanul la 11 şi sârbul la 13. Deci croatul este tot la 14.

20. Un grup de trei numere naturale nenule x_1, x_2, x_3 se numeşte *complet* dacă $x_1 < x_2 < x_3$, x_1 divide pe x_2 şi x_2 divide pe x_3. De exemplu $2, 20, 60$ reprezintă un exemplu de grup complet. Câte grupuri complete au pe ultima poziţie numărul 176?

A. 36
B. 26
C. 16
D. 20
E. 24

Răspuns: **B**

Indicaţie: Avem $176 = 2^4 \cdot 11$. El are 10 divizori, astfel $1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 88, 176$. Evident $x_3 = 176$, deci mai trebuie să alegem 2 numere. Dacă $x_1 = 1$ avem 8 variante, pentru $x_1 = 2$ avem 6 variante, pentru $x_1 = 4$ avem 4 variante, pentru $x_1 = 8$ avem 2 variante, pentru $x_1 = 11$ avem 3 variante, pentru

$x_1 = 16$ sunt 0 variante, pentru $x_1 = 22$ sunt 2 variante şi pentru $x_1 = 44$ este o variantă. În total avem 26 de grupuri complete.

21. Determinaţi pentru câte valori ale numărului natural n numărul $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ are la final exact 11 cifre de 0.

A. 5
B. 2
C. 3
D. 0
E. 1

Răspuns: **D**
Indicaţie: Deoarce până la 45 sunt 9 numere divizibile cu 5, atunci exponentul lui 5 va fi 10. După ce n trece de 50 exponentul sare la 12, deci niciodată nu vor fi exact 11 zerouri la final.

22. Pe o bucată de hârtie sunt scrise una sub alta cinci propoziţii, după cum urmează:

P1: Din cele 5 propoziţii exact una este falsă.
P2: Din cele 5 propoziţii exact două sunt false.
P3: Din cele 5 propoziţii exact trei sunt false.
P4: Din cele 5 propoziţii exact patru sunt false.
P5: Din cele 5 propoziţii exact cinci sunt false.

Câte propoziţii false sunt scrise pe foaie?

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

Răspuns: **E**
Indicaţie: Nu pot fi toate propoziţiile false, dar nic două nu pot fi simultan adevărate. În consecinţă vor fi 4 propoziţii false, deci P4 este adevărată.

23. Fie a, b, c, d, e cinci numere naturale diferite care nu se divid cu 5, astfel încât $a < b < c < d < e$. Ultima cifră a numărului

$$P = (e^2 - a^2)(e^2 - b^2)(e^2 - c^2)(e^2 - d^2)(d^2 - a^2)(d^2 - b^2)(d^2 - c^2)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)$$

este egală cu

A. Nu se poate determina cu exactitate
B. 5
C. 1
D. 0
E. 4

Răspuns: **D**
Indicaţie: Ultima cifră a unui pătrat perfect nedivizibil cu 5 este $1, 4, 6$ sau 9. Deci cel putin două patrate se termină cu aceea şi cifră, de P se termină cu 0.

24. Într-o sală există 2021 întrerupătoare, corespunzător la 2021 becuri. Iniţial toate becurile sunt stinse. În sală intră pe rând 2021 copii. Fiecare copil schimbă starea becurilor corespunzător întrerupătoarelor pe care le atinge, adică dacă becul era stins îl aprinde, iar dacă becul era aprins îl va stinge. Se ştie că acel copil care are numărul k apasă pe întrerupătoare din k în k, începând cu primul, pentru orice k cuprins între 1 şi 2021. De exemplu, al cincilea copil apasă pe întrerupătoarele $1, 6, 11, 16$ etc. Al unsprezecelea copil apasă pe butoanele $1, 12, 23, 34$ etc. Numărul de becuri rămase aprinse după ce toţi cei 2021 copii au trecut prin sală este egal cu

A. 39
B. 41
C. 43
D. 45
E. 47

Răspuns: **D**

Indicaţie: Evident că un bec va rămâne aprins la final dacă întrerupătorul corespunzător este atins de un număr impar de copii. De exemplu, primul bec va fi la final aprins.

Fie $l \geq 2$. Să remarcăm că starea becului cu numărul l este modificată de copilul cu numărul k dacă şi numai dacă $l-1$ se divide cu k. Prin urmare, becul cu numărul l va fi la final aprins doar dacă $l-1$ are număr impar de divizori, adică $l-1$ este pătrat perfect. Cel mai mare pătrat perfect, mai mic decât 2021, este $44^2 = 1936$, deducem că $l-1$ este egal cu $1^2, 2^2, ..., 44^2$. Ţinând cont de observaţia iniţială, deducem că sunt 45 de becuri care rămân aprinse.