Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuațiile:

(i) $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}=\frac{1}{2^x+3^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

(ii) $x+2^x+\log_2 x=7$, $x\in(0,\infty)$.

2.

(i) Dacă $a,b\geq 2$ arătați că $\lg a+\lg b\geq \lg(a+b)$.

(ii) Demonstrați că pentru orice $a,b,c\in[2,\infty)$ are loc inegalitatea $\log_{b+c}a+\log_{c+a}b+\log_{a+b}c\geq\frac{3}{2}$.

3. Considerăm F mulțimea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x)+f(x+f(x))=3x+3, (\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

(i) Mulțimea F conține cel puțin o funcție de gradul 1;

(ii) Dacă $f\in F$, atunci ecuația *f(x)=0* are o unică soluție reală.

GM 2014

4. Fie z_1,z_2,z_3 numere complexe cu proprietatea că $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_1+z_2+z_3|=1$.

(i) Să se arate că dacă $z_1=z_2$ *atunci* $z_1+z_3=0$.

(ii) Demonstrați că $(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)=0$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a X-a

1.

(i) Ecuația este echivalentă cu $\left(2^x+3^x\right)^2=4\cdot 2^x\cdot 3^x$, $n\in\mathbb{N}^*$ — **1p**

De unde $2^x=3^x$ și atunci *x=0* — **2p**

(ii) Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x+2^x+\log_2 x$

este funcție strict crecătoare. — **2p**

f(2)=7 — **1p**

Finalizare — **1p**

2. **(i)** $\lg a+\lg b\geq \lg(a+b)\Leftrightarrow \lg a\cdot b\geq \lg(a+b)\Leftrightarrow$ — **1p**

$a\cdot b\geq a+b\Leftrightarrow (a-1)(b-1)\geq 1$ adevărat — **2p**

(ii) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\lg a}{\lg(b+c)}+\frac{\lg b}{\lg(c+a)}+\frac{\lg c}{\lg(a+b)}\geq\frac{3}{2}$. — **1p**

Din (i) avem $\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg(b+c)}\geq\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}$ — **2p**

Cum $\sum_{ciclic}\frac{\lg a}{\lg b+\lg c}\geq\frac{3}{2}$ inegalitatea din enunț este dovedită. — **1p**

3.

(i) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=ax+b$ — **1p**

Atunci găsim $a=-3$ și $b=-3$ sau $a=1$ și $b=1$ — **1p**

(ii) Fie $f\in F$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=x+f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Atunci din enunț avem $g(g(x))=4x+3$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. — **2p**

Cum ecuația $4x+3=x$ are o unică soluție în $\mathbb{R}$ pe *-1*, deduce că ecuația $g(g(x))=x$ are o unică soluție în $\mathbb{R}$ pe *-1*, ceea ce conduce la unicitatea soluției ecuației $g(x)=x$. — **1p**

Finalizare — **1p**

4.

(i) Dacă $z_1=z_2$ atunci dacă $|2z_1+z_3|=1$ și din egalitatea

$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ (identitatea paralelogramului), deducem că $|2z_1-z_3|=3$ și din — **2p**

$3=|2z_1-z_3|\leq 2|z_1|+|z_3|=3$ găsim că $2z_1=\alpha\cdot(-z_3)$ cu $\alpha\in\mathbb{R},\alpha\geq 0$, adică $\alpha=2$ și

atunci $z_1+z_3=0$. — **2p**

(ii) În mod cert numerele complexe nu pot fi toate egale.
Dacă două sunt egale, atunci din (i) deducem că produsul este 0. **1p**
Dacă numerele sunt diferite două câte două, atunci ele pot fi afixele vârfurilor unui triunghi cu $|h| = 1$, unde h este afixul ortocentrului și atunci ortocentrul se află pe cercul circumscris triunghiului, de unde deducem că triunghiul este dreptunghic și atunci concluzia este evidentă. **2p**

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.