INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI CĂLĂRAŞI

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit. Arătați că:

a) Dacă grupul $(G,\cdot)$ are cel puțin un element de ordin doi, $\prod_{x\in G} x = \prod_{x\in G,\ ord x=2} x.$

b) Spunem că un subgrup H al lui G are proprietatea (P) dacă $H \neq G$ și $\prod_{x\in H} x = \prod_{x\in G\setminus H} x.$ Demonstrați că dacă H este un subgrup al lui G care are proprietatea (P), atunci orice subgrup a lui H, diferit de H, are proprietatea (P).

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup și funcția $f: G \to G,\ f(x) = x^2$. Dacă f este morfism arătați că $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

Problema 3. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + nx + 1}{x+1}dx,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Arătaţi că : $I_n < 1 + n\ln\frac{e}{2}$

b) Calculaţi : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot(I_n + I_{n+1})$

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Problema 4. Determinați mulțimea M a funcțiilor continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, care admit o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $F(-x) = \frac{x}{f(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3. a**) 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro