Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 15 februarie 2015

1. Dacă limita $\lim_{n\to\infty} n\left(an - \sqrt[3]{n^3 + bn + c}\right)$ este finită, aflați valorile parametrilor $a, b, c \in \mathbb{R}$

2. Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^n - X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ..

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + nx_n^2}$, $n \geq 1$, cu $x_1 > 0$. Studiaați convergența şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(nx_n)_{n\geq 1}$, şi în caz de convergență să se calculeze limitele acestor şiruri!

4. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente numere complexe, cu proprietatea $AB - BA = A$. Arătați că $AB^nA = O_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Hargita megye Tanfelügyelősége

Matematika tantárgyverseny – XI. osztály
Területi szakasz – 2015. február 15.

1. Hatţrozd meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ számok értékeit, ha a $\lim_{n\to\infty} n\left(an - \sqrt[3]{n^3 + bn + c}\right)$ határérték véges!

2. Oldd meg $M_2(\mathbb{R})$-ben az $X^n - X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletet, ha $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

3. Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + nx_n^2}$, $n \geq 1$ sorozat, ahol $x_1 > 0$. Vizsgáld az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(nx_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergenciáját és amennyiben konvergensek, számítsd ki a határértéküket!

4. Az A és B másodrendű négyzetes mátrixok elemi complex számok és $AB - BA = A$. Igazold, hogy $AB^nA = O_2$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!