Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al treilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 6 iunie 2021

Problema 1.

Arătaţi că pentru orice $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{7}{1+abc}.$$

Problema 2.

În triunghiul ascuţitunghic ABC se notează cu O centrul cercului circumscris şi cu D piciorul înălţimii din A.

Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor AB, AC, BD, respectiv CD. Arătaţi că unul dintre punctele de intersecţie ale cercurilor circumscrise triunghiurilor AMN şi POQ este situat pe înălţimea AD.

Problema 3.

Fie p, q numere naturale nenule. Pentru fiecare $a, b \in \mathbb{R}$ definim mulţimile

$$P(a) = \left\{ a_n = a + n \cdot \frac{1}{p} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad Q(b) = \left\{ b_n = b + n \cdot \frac{1}{q} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Numim *distanţa* de la $P(a)$ la $Q(b)$ valoarea minimă a diferenţei $|x - y|$, cu $x \in P(a)$, $y \in Q(b)$.

Determinaţi distanţa maximă între mulţimile $P(a)$ şi $Q(b)$, când a şi b parcurg mulţimea $\mathbb{R}$.

Problema 4.

Fie M o mulţime formată din 13 numere naturale de trei cifre.

Arătaţi că există o submulţime nevidă $S \subset M$ şi o combinaţie de operaţii aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulţire, împărţire - fără a utiliza parantezele) între elementele lui S, astfel încât valoarea expresiei rezultate să fie un număr raţional din intervalul $(3, 4)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă valorează 7 puncte.