OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a VIII-a

Problema 1. **a)** Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z, t are loc egalitatea:

$$(xz+yt)^2+(xt-yz)^2=(x^2+y^2)(z^2+t^2)$$

b) Numerele raţionale pozitive *a*, *b*, *c*, *d* verifică simultan egalităţile:

$$a^2+b^2=9, \qquad c^2+d^2=16, \qquad ac+bd=12.$$

Arătaţi că numărul $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c\sqrt{3}+d}$ este raţional.

Ion Neaţă, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) Verificare directă .... (2p)

b) Din relaţia de la **a)** rezultă $(ad-bc)^2=0$, de unde $ad=bc$ sau $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ .... (2p)

Atunci $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c\sqrt{3}+d}=\dfrac{b\left(\dfrac{a}{b}\cdot\sqrt{3}+1\right)}{d\left(\dfrac{c}{d}\cdot\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{b}{d}$, care este număr raţional .... (3p)

Problema 2. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia:

$$2x^2+2y^2-3x-3y+2=0.$$

Constantin Apostol, Gazeta Matematică nr. 9/2014

Soluţie şi barem de corectare

Înmulţind cu 2, egalitatea din enunţ se scrie echivalent $(x-3)^2+(y-3)^2+3x^2+3y^2=14$ .... (3p)

Atunci $3x^2\le 14$, de unde $|x|\le 2$, adică $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ .... (2p)

Verificând fiecare caz în parte, se obţine o singură soluţie, şi anume $x=y=1$ .... (2p)

Problema 3. Determinaţi numerele reale *a* şi *b* care verifică egalitatea

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}+\sqrt{b+2014}-2-\frac{a+b}{2}=0.$$

Iuliana Traşcă, Scorniceşti

Soluţie şi barem de corectare

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}=\sqrt{3\cdot(a-2014)}\le\dfrac{3+a-2014}{2}=\dfrac{a-2011}{2}$ .... (1p)

$\sqrt{b+2014}=\sqrt{1\cdot(b+2014)}\le\dfrac{1+b+2014}{2}=\dfrac{b+2015}{2}$ .... (1p)

Atunci $\sqrt{3}\cdot\sqrt{a-2014}+\sqrt{b+2014}\le\dfrac{a-2011+b+2015}{2}=2+\dfrac{a+b}{2}$ .... (1p)

Relaţia din enunţ corespunde situaţiilor de egalitate din inegalităţile de mai sus, deci $a-2014=3$ şi $b+2014=1$, de unde $a=2017$ şi $b=-2013$ .... (1p)

Problema 4. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 6$ cm şi $m(\sphericalangle BAD) = 60°$. De aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AM şi CQ pe planul (ABC) astfel încât $AM = 9$ cm şi $CQ = 3$ cm.

a) Demonstraţi că planele (MBD) şi (QBD) sunt perpendiculare.
b) Calculaţi distanţa dintre dreptele BD şi MQ.
c) Determinaţi cosinusul unghiului format de planele (MBQ) şi (ABC).

Dorin Popa, Slatina

Soluţie şi barem de corectare

a) $m(\sphericalangle MOA) = 60°$, $m(\sphericalangle QOC) = 30°$ .... (1p)
Măsura unghiului plan corespunzător diedrului este $m(\sphericalangle MOQ) = 90°$, deci $(MBD) \perp (QBD)$ .... (1p)
b) Fie $\{O\} = AC \cap BD$; construind $OP \perp MQ$ se arată că $d(BD, MQ) = OP$ .... (1p)
$OP = 3\sqrt{3}$ cm .... (1p)
c) Proiecţia triunghiului MBQ pe planul ABC este triunghiul ABC .... (1p)
Aria triunghiului ABC este $9\sqrt{3}$ cm^2, iar aria triunghiului BMQ este 36 cm^2 .... (1p)
Notând $\alpha = (MBQ),(ABC)$, avem $S_{ABC} = S_{MBQ} \cdot \cos\alpha$, de unde $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .... (1p)