

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Problema 1. Împărțind numărul natural a la numărul natural b se obține câtul 14 și restul 18. Știind că diferența dintre numerele a și $a - 3b$ este egală cu 135, arătați că numărul $2a$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 11/2013

Problema 2. Se consideră numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a < b < c < d$ și $a \cdot b \cdot c \cdot d = 2014$. Aflați ultima cifră a numărului $n = a^{2014} + b^{2014} + c^{2014} + d^{2014}$.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 3. Fie numărul $S = 1 + 3^3 + 3^6 + 3^9 + \dots + 3^{2010}$.

a) Arătați că numărul $26S + 1$ este cub perfect.

b) Determinați numărul natural a cu pentru care are loc egalitatea $a^{61} = 26S + 1$.

Nicolae Bivol, Corabia

Problema 4. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n^2 + 5, n \in \mathbb{N}, n \leq 2014\}$.

a) Aflați cele mai mici patru elemente ale mulțimii A .

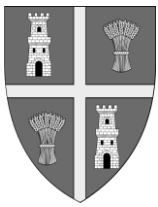
b) Arătați că $261 \in A$ și că $2014 \notin A$.

c) Fie mulțimea $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n(n+1) + 5, n \in \mathbb{N}, n \leq 2014\}$.

Calculați diferența $S(B) - S(A)$, unde $S(A)$ este suma elementelor mulțimii A , iar $S(B)$ este suma elementelor mulțimii B .

Florin Năsui, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore și 30 de minute.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Soluții și bareme de corectare

Problema 1.Din teorema împărțirii cu rest avem: $a = 14b + 18, 14 < 18$ (2p)Cum $a = a - 3b + 135$, rezulta $b = 45$ (2p) $a = 14 \cdot 45 + 18$, de unde $a = 648$ (2p) $2a = 1296 = 36^2$ rezulta $2a$ este patrat perfect. (1p)**Problema 2.** $2014 = 1 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ (1p)Cum $a < b < c < d$ și 2, 19, 53 numere prime, avem $a=1; b=2; c=19; d=53$ și $n = 1^{2014} + 2^{2014} + 19^{2014} + 53^{2014}$ (1p) $U(1^{2014}) = 1, U(2^{2014}) = 4, U(19^{2014}) = 1$ și $U(53^{2014}) = 9$ (4p)Atunci $U(n) = U(1 + 4 + 1 + 9) = U(15) = 5$ (1p)**Problema 3.**a) Fie $S = 1 + 3^3 + 3^6 + 3^9 + \dots + 3^{2010} / \cdot 3^3$ (1p)

$$27S = 3^3 + 3^6 + 3^9 + \dots + 3^{2010} + 3^{2013} \quad (1p)$$

$$27S - S = 3^{2013} - 1 \Rightarrow 26S + 1 = 3^{2013} \quad (1p)$$

$$26S + 1 = (3^{671})^3 \text{ cub perfect} \quad (1p)$$

b) $26S + 1 = (3^{671})^3 = (3^{61 \cdot 11})^3 = (3^{33})^{61} = a^{61}$
 $\Rightarrow a = 3^{33}$ (3p)**Problema 4.** Cele mai mici patru elemente sunt 5, 6, 9, 14 (2p)a) $n^2 + 5 = 261 \Rightarrow n^2 = 256 \Rightarrow n = 16$, deci $261 \in A$ (1p)

$$n^2 + 5 = 2014 \Rightarrow n^2 = 2009$$

Cum $2009 = 7^2 \cdot 41 \Rightarrow 2009$ nu este patrat perfec, deci 2014 nu este termen al sirului (2p)c) $S(B) - S(A) = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2014 = 2029105$ (2p)