OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Problema 1. Împărţind numărul natural a la numărul natural b se obține câtul 14 şi restul 18. Ştiind că diferența dintre numerele a şi $a-3b$ este egală cu 135, arătaţi că numărul $2a$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 11/2013

Problema 2. Se consideră numerele naturale a, b, c, d astfel încât $a<b<c<d$ şi $a\cdot b\cdot c\cdot d=2014$. Aflați ultima cifră a numărului $n=a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}+d^{2014}$.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 3. Fie numărul $S=1+3^3+3^6+3^9+...+3^{2010}$.

a) Arătaţi că numărul $26S+1$ este cub perfect.

b) Determinaţi numărul natural a cu pentru care are loc egalitatea $a^{61}=26S+1$.

Nicolae Bivol,Corabia

Problema 4. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\mid x=n^2+5,\ n\in\mathbb{N},\ n\leq 2014\right\}$.

a) Aflaţi cele mai mici patru elemente ale mulţimii A.

b) Arătaţi că $261\in A$ şi că $2014\notin A$.

c) Fie mulţimea $B=\left\{y\in\mathbb{N}\mid y=n(n+1)+5,\ n\in\mathbb{N},\ n\leq 2014\right\}$.

Calculaţi diferenţa $S(B)-S(A)$, unde $S(A)$ este suma elementelor mulţimii A, iar $S(B)$ este suma elementelor mulţimii B.

Florin Năsui,Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore şi 30 de minute.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a V-a

Soluţii şi bareme de corectare

Problema 1.

Din teorema impartirii cu rest avem:$a = 14b + 18, 14 < 18$ (2p)

Cum a=a-3b+135, rezulta b=45 (2p)

a= $14 \cdot 45 + 18$, de unde a=648 (2p)

$2a = 1296 = 36^2$ rezulta 2a este patrat perfect. (1p)

Problema 2.

$2014 = 1 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$ (1p)

Cum $a < b < c < d$ si 2,19,53 numere prime,avem a=1;b=2;c=19;d=53 si $n = 1^{2014} + 2^{2014} + 19^{2014} + 53^{2014}$ (1p)

$U(1^{2014}) = 1, U(2^{2014}) = 4, U(19^{2014}) = 1 si\ U(53^{2014}) = 9$ (4p)

Atunci $U(n) = U(1 + 4 + 1 + 9) = U(15) = 5$ (1p)

Problema 3.

a) Fie $S = 1 + 3^3 + 3^6 + 3^9 + \cdots + 3^{2010} / \cdot 3^3$ (1p)
27S=$3^3 + 3^6 + 3^9 + \cdots + 3^{2010} + 3^{2013}$ (1p)
27S-S=$3^{2013} - 1 \Rightarrow 26S + 1 = 3^{2013}$ (1p)
26S+1=$(3^{671})^3$cub perfect (1p)

b) 26S+1=$(3^{671})^3$=$(3^{61\cdot 11})^3$=$(3^{33})^{61} = a^{61}$
$\Rightarrow a = 3^{33}$ (3p)

Problema 4. Cele mai mici patru elemente sunt 5,6,9,14 (2p)

a) $n^2 + 5 = 261 \Rightarrow n^2 = 256 \Rightarrow n = 16, deci\ 261 \in A$ (1p)

$n^2 + 5 = 2014 \Rightarrow n^2 = 2009$

Cum $2009 = 7^2 \cdot 41 \Rightarrow 2009\ nu$ este patrat perfec,deci 2014 nu este termen al sirului (2p)

c)S(B)-S(A)=0+1+2+3+...+2014=2029105 (2p)