Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a VIII-a

Subiecte :

1. Fie $A(n) = 1 + 2 + \cdots + n + \frac{1}{(-1)^1} + \frac{2}{(-1)^2} + \cdots + \frac{n}{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Dacă n este număr par, arătați că $2A(n) + 1$ este pătrat perfect.

   b) Dacă $a = \frac{A(2016)}{2}$, arătați că $2\sqrt{a} < 2017$.

2. Se consideră expresia $E(x,y) = \frac{(2x-y)(x-2y)}{1+x^2y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Să se găsească un exemplu de numere reale x și y care verifică egalitatea $E(x,y) = -\frac{1}{2}$.

   b) Să se arate că $E(x,y) \geq -\frac{1}{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. În mijlocul lui $[BC]$ se ridică perpendiculara pe planul triunghiului, pe care se consideră punctul D,iar M este mijlocul lui $[AD]$. Știind că $AD \perp BC$ și $[AD] \equiv [BC]$, să se arate că :

   a) $[AB] \equiv [AC]$.

   b) Măsura unghiului plan al diedrului format de planele (DBC) și (MBC) este de 30° .

Prof. Negreanu Pantelimon, Alexandria

4. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendicularele AA', BB', CC' astfel încât A', B', C' se află de aceeași parte a planului pătratului și $[AA'] \equiv [BB'] \equiv [CC']$. Să se arate că planele $(AB'C)$ și $(A'DC')$ sunt paralele.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Barem cls. a VIII-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1.
a) $A(n) = A(2k) = 1 + 2 + \cdots + 2k + (-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2k-1) + 2k) = \frac{2k(2k+1)}{2} + k = k(2k+1) + k = 2k^2 + 2k$, deci $2A(n) + 1 = = 4k^2 + 4k + +1 = (2k+1)^2$ ……………………………………………………4 p

b) Din a), pentru $n = 2k$, $A(n) = 2\,k(k+1)$, deci $A(2016) = 2 \cdot 1008 \cdot 1009$ și $a = 1008 \cdot 1009$, $2\sqrt{a} = 2\sqrt{1008 \cdot 1009} < 1008 + 1009 = 2017$ (folosind inegalitatea $2\sqrt{xy} < x + y\ , x \neq y$)……………………………………..3 p

2. a) $x = 1, y = 1$ verifică relația…………………………………………… 2 p

b) Folosind inegalitatea $x^2 + y^2 \geq 2xy$ rezultă
$$\frac{(2x-y)(x-2y)}{1+x^2y^2} = \frac{2x^2-5xy+2y^2}{1+x^2y^2} = \frac{2(x^2+y^2)-5xy}{1+x^2y^2} \geq \frac{4xy-5xy}{1+x^2y^2} = \frac{-xy}{1+x^2y^2} \geq$$
$\geq -\frac{1}{2}$, deoarece $\frac{xy}{1+x^2y^2} \leq \frac{1}{2}$, $2xy \leq 1 + x^2y^2$, $0 \leq (1-xy)^2$ …..5 p

3. a) Fie O mijlocul lui $[BC]$. Deoarece $BC \perp AD$, $BC \perp OD$ rezultă $BC \perp (AOD)$ și $BC \perp AO$,deci $[AO]$ este mediană și înălțime în triunghiul ABC și $[AB] \equiv [AC]$……………………………………………………3 p

b) $BC \perp (AOD)$ deci $BC \perp OM$…………………………………………… 1 p

Din $OM \perp BC, OD \perp BC$ rezultă că măsura unghiului cerut este $m(\sphericalangle MOD)$ ……………………………………………………………………………… 1 p

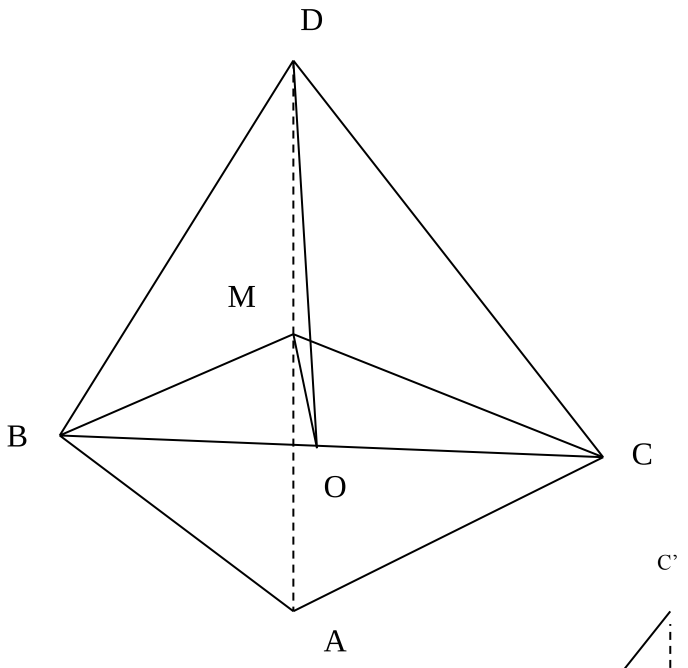
Din $[AD] \equiv [BC]$ și $AO = \frac{BC}{2}$ rezultă că în triunghiul dreptunghic AOD, $AO = \frac{AD}{2}$, deci $m(\sphericalangle ODA) = 30^\circ$ și, deoarece $[MO] \equiv [MD]$ (mediană în triunghi dreptunghic), $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle ODA$ și $m(\sphericalangle MOD) = 30^\circ$……………..2 p

4. $ACC'A'$ dreptunghi, deci $AC \parallel A'C'$ ………………………………... 2 p

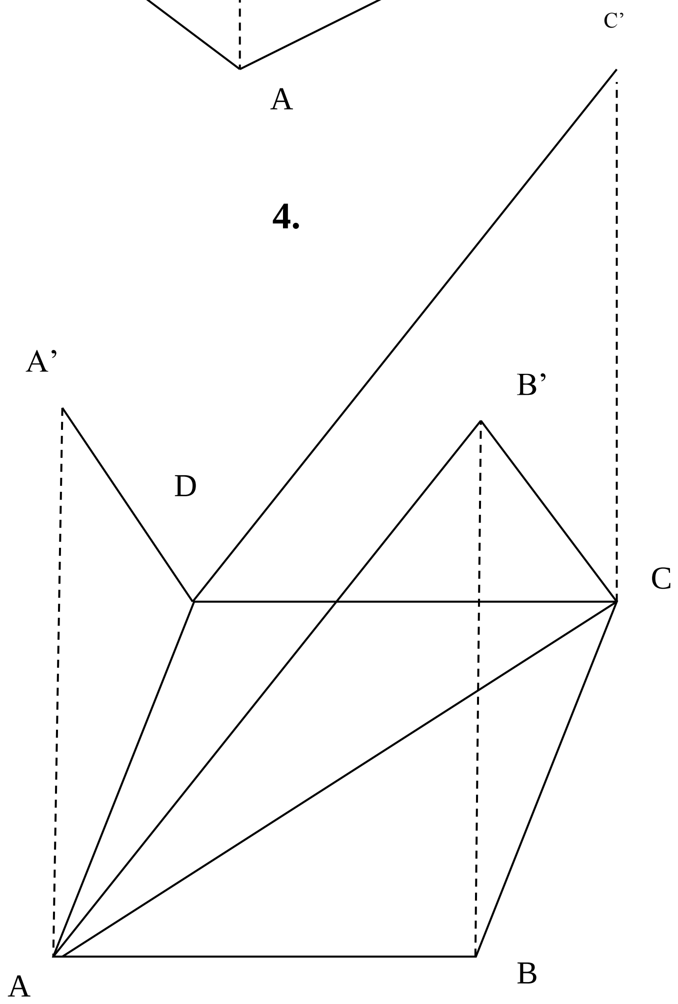
$B'C' \parallel BC \parallel AD$ și din teorema celor trei perpendiculare va rezulta $B'A \perp AD$, $C'D \perp AD$, $B'C'DA$ dreptunghi deci $B'A \parallel C'D$……………………………….2 p

Din cele două relații de paralelism rezultă cerința……………………… 3 p

3.



4.



Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro