Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SOLUȚII

1. Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{11}}}+\frac{\sqrt{36-10\sqrt{11}}}{2}\in\mathbb{N}$.

Rezolvare

$$\frac{1}{\sqrt{20+6\sqrt{11}}}+\frac{\sqrt{36-10\sqrt{11}}}{2}=\frac{1}{\sqrt{11+6\sqrt{11}+9}}+\frac{\sqrt{25-10\sqrt{11}+11}}{2}=\frac{1}{\sqrt{11}+3}+\frac{5-\sqrt{11}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{11}-3}{2}+\frac{5-\sqrt{11}}{2}=1\in\mathbb{N}$$

2. Să se arate, că pentru oricare $a,b\in\mathbb{N}$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2}{4\sqrt{2}}+\frac{b^2}{4\sqrt{3}}\geq\frac{ab}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Rezolvare

$$\frac{a^2}{4\sqrt{2}}+\frac{b^2}{4\sqrt{3}}\geq\frac{ab}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}a^2+\sqrt{2}b^2}{\sqrt{6}}\geq\frac{4ab}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6}a^2+2b^2+3a^2+\sqrt{6}b^2\geq 4\sqrt{6}ab\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6}a^2-2\sqrt{6}ab+\sqrt{6}b^2+2b^2-2\sqrt{6}ab+3a^2+\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6}(a-b)^2+(\sqrt{2}b-\sqrt{3}a)^2\geq 0 \text{ adevărat}$$

3. a) Să se determine mulțimile

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\leq x\leq 3\} \text{ și } B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{4x^2+17}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$$

b) Să se determine $A\cap B$

Rezolvare

a) $A=[-3,3]$

$$\frac{4x^2+17}{2x+1}=\frac{4x^2-1+18}{2x+1}=2x-1+\frac{18}{2x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2x+1)\in\{-18,-9,-6,-3,-2,-1,1,2,3,6,9,18\}$$

$$B=\{-5,-2,-1,0,1,4\}$$

b) $A\cap B=\{-2,-1,0,1\}$

4. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ avem $AB = 4$cm şi $AA' = 3\sqrt{6}$ cm. Fie M şi N mijloacele muchiilor AB şi BC.

a) Să se calculeze aria triunghiului $D'MN$.

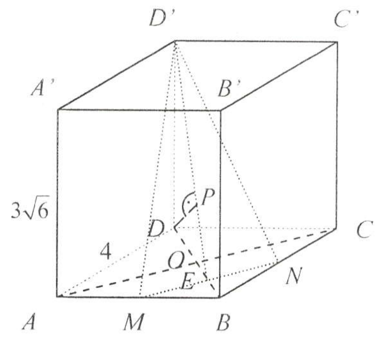
b) Să se calculeze măsura unghiului determinat de planele $(D'MN)$ şi (ABC).

c) Să se calculeze distanţa punctului D de planul $D'MN$.

Rezolvare

a) $\Delta D'AM \equiv \Delta D'CN \Rightarrow [D'M] \equiv [D'N] \Rightarrow \Delta D'MN$ isoscel.

Fie $AC \cap DB = \{O\}$ şi $MN \cap DB = \{E\}$.



$$\left.\begin{array}{l} D'D \perp (ABC) \\ DE \perp MN \end{array}\right\} \xrightarrow{t3\perp} D'E \perp MN.$$

$$DE = \frac{3}{4} \cdot DB = \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(cm).$$

$$D'E^2 = DD'^2 + DE^2 = \left(3\sqrt{6}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 54 + 18 = 72 \Rightarrow$$

$$D'E = 6\sqrt{2}(cm).$$

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}(cm).$$

$$A_{D'MN} = \frac{MN \cdot D'E}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 12(cm^2).$$

b) $m[\widehat{(D'MN),(ABC)}] = m\,(\widehat{D'ED})$, $tg\,(\widehat{D'ED}) = \dfrac{DD'}{DE} = \dfrac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow m\,(\widehat{D'ED}) = 60°$.

c) Fie $DP \perp D'E$. Avem $PE \perp MN$ şi $DE \perp MN$. Din reciproca teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $d(D,(D'MN)) = DP$

$$DP = \frac{DD' \cdot DE}{D'E} = \frac{3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}(cm).$$

5. În rombul $ABCD$ sunt date $AB = 10$ cm, $m\,(\widehat{BAD}) = 60°$, $AC \cap BD = \{O\}$, M şi N fiind mijloacele laturilor AB şi AD. Deasupra planului rombului construim piramidele triunghiulare regulate $PAMN$ şi $RBCD$ cu vârfurile P şi R în aşa fel, ca $[PA] \equiv [AM]$ şi $[RB] \equiv [BC]$.

a) Să se calculeze lungimea segmentului PR.

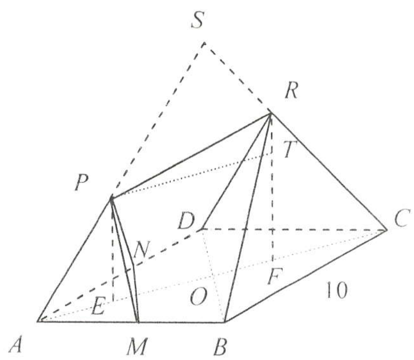
b) Dacă $AP \cap CR = \{S\}$, să se demonstreze, că $SO \perp (ABC)$!

Rezolvare

a) Fie $PE \perp (ABC)$ şi $RF \perp (ABC)$. E şi F sunt centrele de greutate ale triunghurilor echilaterale AMN, respectiv $DBC \Rightarrow AE = \dfrac{1}{3}AO = \dfrac{1}{6}AC$ şi $CF = \dfrac{2}{3}CO = \dfrac{1}{3}AC \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE + CF = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot AC = \frac{AC}{2} \Rightarrow EF = \frac{AC}{2}$$

$$= 5\sqrt{3}(cm).$$



$$PE^2 = PA^2 - AE^2 = 5^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 25 - \frac{75}{9} = \frac{150}{9} \Rightarrow PE = \frac{5\sqrt{6}}{3}(cm) \text{ și}$$

$$RF^2 = RC^2 - CF^2 = 10^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 100 \cdot \frac{6}{9} \Rightarrow RF = \frac{10\sqrt{6}}{3}(cm).$$

Fie $PT \perp RF$, $RT = RF - PE = \frac{10\sqrt{6}}{3} - \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3}(cm)$.

$$PR = \sqrt{PT^2 + RT^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2\left(1 + \frac{2}{9}\right)} = \frac{5\sqrt{33}}{3}(cm).$$

b) $\frac{PE}{RF} = \frac{PA}{RC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PAE_{\triangle} \sim RCF_{\triangle} \Rightarrow \widehat{PAE} \equiv \widehat{RCF} \Rightarrow \Delta SAC$ este isoscel, iar SO mediană $\Rightarrow SO \perp AC$.