OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
15 februarie 2015

CLASA a X-a

1. a) **(3p)** Să se arate că pentru orice numere reale *a,b* cu $a+b\geq 0$ are loc inegalitatea: $4\left(a^3+b^3\right)\geq\left(a+b\right)^3$.

b) **(4p)** Numerele reale pozitive *x, y* satisfac relația $x+y=3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{y+3}$. Determinați valoarea maximă a sumei $x+y$.

2. Dacă $a,b,c\in\left(1,+\infty\right)$, să se demonstreze: $\log_{ab^2c^2}a+\log_{bc^2a^2}b+\log_{ca^2b^2}c\geq\frac{3}{5}$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x+\log_3\left(1+3^x\right)$. Să se arate că:

a) **(5p)** Funcția *f* este inversabilă și $f^{-1}\left(x\right)<f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

b) **(2p)** $f\left(n\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

4. Fie a,b,c numere complexe distincte două câte două, având același modul. Să se arate că punctele de afixe a,b,c sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $a^3\left(b-c\right)+b^3\left(c-a\right)+c^3\left(a-b\right)=0$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.