

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

CLASA A VII-A

- 1.) Comparați numerele $A = \frac{(-1)^n}{3 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^6 + 9 \cdot (-1)^9 + \dots + 2016 \cdot (-1)^{2016}}$ și $B = (-1)^n \cdot \frac{1}{288} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{1008} + (-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{2016}$, știind că n este număr natural.
- 2.) Să se determine numărul \overline{aabb} , a și b fiind cifre scrise în sistemul zecimal, dacă $\sqrt{\overline{aabb}} = \overline{aab} - b - a$.
- 3.) Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) și se notează cu E mijlocul laturii AD . Se construiește $EP \perp BC$, $P \in (BC)$.
- a) Să se arate că $A_{[ABCD]} = EP \cdot BC$.
- b) Dacă $AB = 3 \cdot DC$ și $A_{[EAB]} = 6 \text{ cm}^2$, calculați aria trapezului $ABCD$.
- 4.) În paralelogramul $ABCD$, bisectoarele unghiurilor \hat{A} și \hat{D} se intersectează în punctul M , iar bisectoarele unghiurilor \hat{B} și \hat{C} în punctul N .
- a) Calculați măsura unghiului \hat{AMD} .
- b) Dacă $AD < DC$, demonstrați că $MN \parallel DC$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 ianuarie 2016
BAREM
CLASA A VII-A

1.)	Din oficiu	1p
	$A = \frac{(-1)^n}{3 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^6 + 9 \cdot (-1)^9 + \dots + 2016 \cdot (-1)^{2016}} = \frac{(-1)^n}{-3 + 6 - 9 + \dots + 2016}$ $A = \frac{(-1)^n}{(-3+6) + (-9+12) + \dots + (-2013+2016)} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot \frac{2016}{6}} = \frac{(-1)^n}{1008}$	4p
	$B = (-1)^n \cdot \frac{1}{288} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{1008} + (-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{2016} = \frac{(-1)^n \cdot 7 + (-1)^{n+1} \cdot 2 + (-1)^{n+2}}{2016}$	1p
	<p>Dacă n este par, atunci $A = \frac{1}{1008}$ și $B = \frac{1 \cdot 7 + (-1) \cdot 2 + 1}{2016} = \frac{6}{2016} = \frac{3}{1008}$.</p> <p>În acest caz $A < B$.</p>	2p
	<p>Dacă n este impar, atunci $A = \frac{-1}{1008}$ și $B = \frac{-1 \cdot 7 + 1 \cdot 2 - 1}{2016} = -\frac{6}{2016} = -\frac{3}{1008}$.</p> <p>În acest caz $A > B$.</p>	2p
2.)	Din oficiu	1p
	$\overline{aab} - b - a = a \cdot 100 + a \cdot 10 + b - b - a = a \cdot 109$	2p
	Deși $\sqrt{aabb} = \overline{aab} - b - a$, obținem că $\sqrt{aabb} = 109 \cdot a$. Atunci $\overline{aabb} = (109 \cdot a)^2 = 11881 \cdot a^2$.	2p
	a este o cifră nenulă	2p
	Dacă $a = 1$, atunci $\overline{aabb} = 11881 \cdot a^2 \Leftrightarrow \overline{11bb1} = 11881 \cdot 1 \Rightarrow b = 8$.	
	Dacă $a = 2 \Rightarrow 11881 \cdot a^2 = 11881 \cdot 4 = 47524$ nu este de forma \overline{aabb} .	3p
	Dacă $a \geq 3$, atunci $11881 \cdot a^2 \geq 11881 \cdot 9 = 106929 > \overline{aabb}$.	
	Deci, $a = 1$ și $b = 8$.	
3.)	Din oficiu	1p
	<p>Desen</p>	1p
	<p>a) Fie $DH \perp AB$, $H \in AB$ și $EF \parallel AB$, $F \in CB$, $EF \cap DH = \{S\}$.</p> $A_{[ABCD]} = A_{[ECB]} + A_{[EDC]} + A_{[EAB]}$ $ES \parallel AB, ED = EA \Rightarrow DS = SH = \frac{DH}{2}$ $A_{[EDC]} + A_{[EAB]} = \frac{DC \cdot \frac{DH}{2}}{2} + \frac{AB \cdot \frac{DH}{2}}{2} = \frac{(DC + AB) \cdot \frac{DH}{2}}{2} = \frac{A_{[ABCD]}}{2}$	2p

$A_{[ABCD]} = A_{[ECB]} + \frac{A_{[ABCD]}}{2} \Rightarrow A_{[ECB]} = \frac{A_{[ABCD]}}{2} \Rightarrow A_{[ABCD]} = 2 \cdot A_{[ECB]}$ $A_{[ECB]} = \frac{BC \cdot EP}{2}, \text{ deci } A_{[ABCD]} = 2 \cdot \frac{BC \cdot EP}{2} = BC \cdot EP$	2p
<p>b) $A_{[EAB]} = \frac{AB \cdot DH}{2} = \frac{3CD \cdot DH}{2} = 3 \cdot A_{[EDC]}$</p> $A_{[EAB]} = 6 \text{ cm}^2, \text{ deci } A_{[EDC]} = \frac{A_{[EAB]}}{3} = 2 \text{ cm}^2$ $A_{[EDC]} + A_{[EAB]} = \frac{A_{[ABCD]}}{2}, \text{ deci } A_{[ABCD]} = 2 \cdot (A_{[EDC]} + A_{[EAB]}) = 16 \text{ cm}^2$	4p

4.)	Din oficiu	1p
		1p
	<p>a) $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180^\circ$</p> <p>$[AM$ este bisectoarea unghiului \hat{A}, $[DM$ este bisectoarea unghiului \hat{D} \Rightarrow</p> $\Rightarrow m(\hat{DAM}) + m(\hat{ADM}) = \frac{m(\hat{A})}{2} + \frac{m(\hat{D})}{2} = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{D})}{2} = 90^\circ$	2p
	<p>În $\triangle ADM$, $m(\hat{DAM}) + m(\hat{ADM}) + m(\hat{AMD}) = 180^\circ$</p> <p>Deci $m(\hat{AMD}) = 180^\circ - (m(\hat{ADM}) + m(\hat{DAM})) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.</p>	1p
	<p>b) $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{C})$ și $m(\hat{D}) = m(\hat{B})$</p> <p>Fie $AM \cap DC = \{T\}$.</p> $AB \parallel DC \Rightarrow m(\hat{ATD}) = m(\hat{BAT}) = \frac{m(\hat{A})}{2}$ $m(\hat{ATD}) = \frac{m(\hat{A})}{2} = \frac{m(\hat{C})}{2} = m(\hat{NCD}) \Rightarrow MT \parallel NC$	2p
	$m(\hat{ATD}) = \frac{m(\hat{A})}{2} = m(\hat{DAT}) \Rightarrow DT = AD$ <p>$ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow AD = BC$, deci $DT = BC$</p> <p>Deoarece $m(\hat{MDT}) = \frac{m(\hat{D})}{2} = \frac{m(\hat{B})}{2} = m(\hat{NBC})$ și $m(\hat{MTD}) = \frac{m(\hat{C})}{2} = m(\hat{NCB})$,</p> <p>iar $DT = BC$, rezultă că $\triangle MDT \equiv \triangle NBC$, de unde rezultă că $MT = NC$</p> <p>$MT \parallel NC$, $MT = NC \Rightarrow MNCT$ este paralelogram $\Rightarrow MN \parallel TC$</p>	3p