MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015 -

CLASA A X-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, autor ***

Fie funcția $f:[0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

a) Arătați că funcția este strict monotonă.

b) Arătați că imaginea funcției este $(0,1]$.

c) Determinați funcția $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ care are proprietatea $g(f(x))=2x+3$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ pentru $x\geq 0$, formulă care descrie o funcție strict descrescătoare	**2p**
b) Din monotonie $f(x)\leq f(0)=1$ și din definiție $f(x)>0$, oricare ar fi $x\geq 0$	**1p**
Pentru orice $y\in(0,1]$ există $x=(1-y^2)^2/4y^2\geq 0$ astfel încât $f(x)=y$	**2p**
c) Notând $f(x)=t$, $g(t)=2(1-t^2)^2/4t^2+3$	**1p**
Deoarece pentru orice $t\in(0,1]$ există $x\in[0,\infty)$ astfel încât $f(x)=t$, formula de mai sus definește funcția căutată	**1p**

Subiect 2, autor ***, supliment G.M.4/2014 și supliment G.M. 11/2014

a) Fie z și w două numere complexe diferite, astfel încât $|z|=|w|$ și $|1+z|=|1+w|$. Arătați că $z=\overline{w}$.

b) Arătați că dacă z este un număr complex de modul 1 și $z\neq\pm i$, atunci $x=\dfrac{z}{z^2+1}$ este număr real. Determinați mulțimea $\left\{\dfrac{z}{z^2+1} \middle| z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, z\neq\pm i\right\}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\|z\|^2=z\overline{z}, \|1+z\|^2=1+z+\overline{z}+z\overline{z}$	**1p**
Ipoteza devine $z+\overline{z}=w+\overline{w}, z\overline{z}=w\overline{w}$	**1p**
Există doar posibilitățile $z=w,\overline{z}=\overline{w}$ sau $z=\overline{w},\overline{z}=w$, dintre care convine doar a doua	**1p**

b) Din ipoteză $z=\cos a+i\sin a$, $\cos a\neq 0$, deci $x=\dfrac{\cos a+i\sin a}{1+\cos 2a+i\sin 2a}=\dfrac{1}{2\cos a}\in\mathbb{R}$	2p
Mulțimea valorilor lui x este $(-\infty,-1/2]\cup[1/2,\infty)$.	2p

Subiect 3, autor *Eugen Radu*

Arătați că, pentru orice număr natural n, $[\sqrt[3]{7n+1}]=[\sqrt[3]{7n+5}]$ (unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Cerința este echivalentă cu faptul că nu există cuburi perfecte între $7n+1$ și $7n+5$	3p
Resturile cuburilor perfecte la împărțirea cu 7 sunt 0, 1, sau 6	3p
Finalizare	1p

Subiect 4, autor *Eugen Radu*

Rezolvați ecuația $2^x+1=(3^x-1)^{\log_2 3}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Deoarece $\log_2 3$ este irațional, trebuie $3^x-1>0$, adică $x>0$	1p
Logaritmând în baza 3 obținem $\log_3(2^x+1)=(\log_2 3)(\log_3(3^x-1))=\log_2(3^x-1)$	2p
Dacă notăm cu y valoarea comună a celor doi logaritmi, atunci $2^x+1=3^y, 3^x-1=2^y$	2p
Deducem $2^x+3^x=2^y+3^y$, de unde $x=y$	1p
Ecuația $2^x+1=3^x$ are soluția unică $x=1$	1p