Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016

Clasa a VIII-a

I. **(a)** Arătaţi că pentru orice număr real $a>0$ este adevărată inegalitatea $a^2+2\geq 2a\sqrt{2}$.
(b) Demonstraţi că, dacă x, y, z sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea

$$\frac{x}{2+x^2}+\frac{y}{2+y^2}+\frac{z}{2+z^2}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Gazeta Matematică, Supliment, 2015

II. Arătaţi că există cel puţin două numere naturale având suma multiplu de 16 şi diferenţa pătratelor lor egală cu 2016.

Prof. Pirvu Camelia, Şcoala Gimnazială "Romul Ladea" Oraviţa

III. Fie Ox, Oy, Oz, trei drepte perpendiculare două câte două şi punctele $A, A'\in Ox$, $B, B'\in Oy$, $C, C'\in Oz$. Arătaţi că dacă ortocentrele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sunt coliniare cu O atunci planele (ABC) și $(A'B'C')$ sunt paralele.

Stăniloiu Nicolae, prf. Bocșa

IV. Fie *ABCD* trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $m(\measuredangle A)=90^0$, $AB=4\sqrt{3}$, $AD=3$, $DC=5\sqrt{3}$.
În punctul *A* ridicăm *AM* perpendicular pe planul trapezului. Dacă notăm cu Q, P proiecțiile lui *A* pe *MD*, respectiv *MB*, iar cu *S* proiecția lui *Q* pe *MC*, calculați lungimea lui *PS*, știind că $AM=4$.

Prof. Avramescu Irina, Şcoala Gimnazială Nr. 9 Reşiţa

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016
Barem de corectare şi notare
Clasa a VIII-a

I. **(a)** Arătaţi că pentru orice număr real $a>0$ este adevărată inegalitatea $a^2+2\geq 2a\sqrt{2}$. **(b)** Demonstraţi că, dacă *x, y, z* sunt numere reale strict pozitive, atunci este adevărată inegalitatea $$\frac{x}{2+x^2}+\frac{y}{2+y^2}+\frac{z}{2+z^2}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$ *Gazeta Matematică, Supliment, 2015*	
a) $\left(a-\sqrt{2}\right)^2\geq 0$	2p
b) $\frac{x}{2+x^2}+\frac{y}{2+y^2}+\frac{z}{2+z^2}\leq\frac{x}{2\sqrt{2}x}+\frac{y}{2\sqrt{2}y}+\frac{z}{2\sqrt{2}z}$	3p
Finalizare	2p
II. Arătaţi că există cel puţin două numere naturale având suma multiplu de 16 şi diferenţa pătratelor lor egală cu 2016.	
Fie $a+b=16k$ şi $a^2-b^2=2016$.	1p
$\Rightarrow a+b=16k\Rightarrow a=16k-b\Rightarrow(16k-b)^2-b^2=2016\Rightarrow 256k^2-32kb=2016$ $\Rightarrow 8k^2-kb=63\Rightarrow k(8k-b)=63$	3p
$\Rightarrow k\in\{1,3,7,9,21,63\}$	1p
$\Rightarrow(a+b,a-b)\in\{(48,42),(112,18),(144,14),(336,6),(1008,2)\}$	1p
$\Rightarrow(a,b)\in\{(45,3),(65,47),(79,65),(171,165),(505,503)\}$	1p
III. Fie Ox, Oy, Oz, trei drepte perpendiculare două câte două şi punctele $A,A'\in Ox$, $B,B'\in Oy$, $C,C'\in Oz$. Arătaţi că dacă ortocentrele triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ sunt coliniare cu O atunci planele (ABC) şi $(A'B'C')$ sunt paralele.	

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
320112, REŞIŢA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC atunci $OH \perp (ABC)$	4p
Dacă H' este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ atunci $OH' \perp (A'B'C')$ și cele două plane au o perpendiculară comună, deci sunt paralele.	3p
IV. Fie *ABCD* trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$, $m(\measuredangle A) = 90^0$, $AB = 4\sqrt{3}$, $AD = 3$, $DC = 5\sqrt{3}$. În punctul *A* ridicăm *AM* perpendicular pe planul trapezului. Dacă notăm cu Q, P proiecțiile lui *A* pe *MD*, respectiv *MB*, iar cu *S* proiecția lui *Q* pe *MC*, calculați lungimea lui *PS*, știind că $AM = 4$.	
$MD = 5$	1p
$MQ = 3,2$	1p
$MD \perp DC$	1p
$\Delta MQS \sim \Delta MCD \Rightarrow MS = 1,6$	2p
Analog, $MP = 2$	1p
$\Delta MPS \sim \Delta MCB$, deci $PS = \frac{2\sqrt{3}}{5}$	1p