

Clasa a VIII-a

Subiectul I.

Se dă expresia $E(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

a) Să se arate că: $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$, $\forall k \in \mathbf{N}$.

b) Arătați că $\frac{3}{2} \cdot E(2) \cdot E(3) \cdot \dots \cdot E(n) \in (1; 2)$, $\forall n \in \mathbf{N}$

Subiectul II.

Fie A, B, C, D puncte necoplanare, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ și $Q \in (AD)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{1}{k}$ și $\frac{AQ}{QD} = \frac{1}{k^3}$, $k \in \mathbf{R}_+$. Să se arate că M, N, P și Q sunt coplanare.

Subiectul III.

Fie $x, z, y \in \mathbf{R}_+$ numere distincte două câte două, astfel încât $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Arătați că $|xyz| = 1$

Subiectul IV.

a) Demonstrați că nu există numere naturale x, y, z pentru care $x + 3y + 5z = 2012$ și $x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$.

b) În patrulaterul convex $ABCD$ avem $AC^2 + BD^2 = AD^2 + 2AB \cdot CD + BC^2$.

Să se arate că $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

(Gazeta matematica 2012)

Propunători: prof. Danciu Alin, prof. Botez Radu, prof. Ginta Vasile, prof. Bălint Attila Sándor