OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a VII-a

1. Se dau numerele:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^{2016}} \\ b &= 3+3^2+3^3+...+3^{2016} \\ c &= \frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}-1. \end{aligned}$$

   Arătaţi că c este pătrat perfect.

   Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii, aprilie 2015

2. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ pentru care există un număr prim k astfel încât

$$a\cdot b = k(a+b).$$

   Cătălin Ciupală

3. În triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ şi $AB = \frac{2}{3}AC$, construim mediana $[CM]$.

   a) Arătaţi că $CM = BC$.

   b) Fie $P \in (AB)$, astfel ca $2AP = AC$, iar S simetricul punctului C faţă de punctul P. Arătaţi că patrulaterul $CBSM$ este romb.

   c) Fie $T \in (AC)$, astfel ca $3TC = 2AC$. Paralela prin A la BC intersectează BT în V. Arătaţi că patrulaterul $ABCV$ este un trapez ortodiagonal neisoscel.

   Dorina Bocu

4. $ABCD$ este un paralelogram în care $AC = 2AD$. Fie E simetricul lui A faţă de B şi $\{F\} = EO \cap BC$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Construim $FM \| AC$, cu $M \in (AB)$.

   a) Arătaţi că $CM \perp BD$.

   b) Calculaţi $\mathcal{A}_{ABCD}$ ştiind că $BD = 5\text{cm}$ şi $CM = 4\text{cm}$.

   Dorina Rapcea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a VII-a

1. Se dau numerele:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+...+\sqrt{3^{2016}} \\ b &= 3+3^2+3^3+...+3^{2016} \\ c &= \frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}-1. \end{aligned}$$

Arătaţi că c este pătrat perfect.

Gazeta Matematică. Supliment cu exerciţii, aprilie 2015

Soluţie.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+3^2+\cdots+3^{1007}\sqrt{3}+3^{1008} \\ &= 3(1+3+\cdots+3^{1007})+\sqrt{3}(1+3+\cdots+3^{1007}) \\ &= (1+3+\cdots+3^{1007})(3+\sqrt{3}).\ \mathbf{(2p)} \\ b &= 3(1+3+\cdots+3^{2015}).\ \mathbf{(1p)} \\ \frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} &= \frac{1+3+\cdots+3^{2015}}{1+3+\cdots+3^{1007}}\ \mathbf{(2p)} \\ c &= \frac{3^{1008}+3^{1009}+\cdots+3^{2015}}{1+3+...+3^{1007}} = 3^{1008} = \left(3^{504}\right)^2.\ \mathbf{(2p)} \end{aligned}$$

2. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ pentru care există un număr prim k astfel încât

$$a\cdot b = k(a+b).$$

Cătălin Ciupală

Soluţie.

Relaţia din ipoteză poate fi scrisă $(a-k)(b-k)=k^2$. **(2p)**

Atunci, deoarece $a\geq 1$ şi k este număr prim, rezultă $(a-k)\in\{1,k,k^2\}$. **(2p)**

Dacă $a-k=1$, atunci $a=k+1$ şi $b=k^2+k$. Cum k este prim şi $b\leq 9$, deducem $k=2$. Obţinem numărul 36. **(1p)**

Dacă $a-k=k$, atunci $a=b=2k$. Cum k este prim şi $a,b\leq 9$, deducem $k\in\{2,3\}$. Obţinem numerele 44 şi 66. **(1p)**

Dacă $a-k=k^2$, atunci $a=k^2+k$ şi $b=k+1$. Cum k este prim şi $a\leq 9$, deducem $k=2$. Obţinem numărul 63. **(1p)**

3. În triunghiul ABC, cu $m(\widehat{A}) = 60°$ şi $AB = \frac{2}{3}AC$, construim mediana $[CM]$.

a) Arătaţi că $CM = BC$.

b) Fie $P \in (AB)$, astfel ca $2AP = AC$, iar S simetricul punctului C faţă de punctul P. Arătaţi că patrulaterul $CBSM$ este romb.

c) Fie $T \in (AC)$, astfel ca $3TC = 2AC$. Paralela prin A la BC intersectează BT în V. Arătaţi că patrulaterul $ABCV$ este un trapez ortodiagonal neisoscel.

Dorina Bocu

Soluţie.

a) Notăm $AC = b$. Atunci $AB = \frac{2b}{3}$, iar $AM = MB = \frac{b}{3}$. Pe semidreapta $(AB$ considerăm punctul D astfel încât $AD = AC$. Cum $m(\widehat{A}) = 60°$, $\triangle ADC$ este echilateral. Din $DB = \frac{b}{3} = AM$, rezultă $\Delta AMC \equiv \triangle DBC$ (LUL), de unde $CM = BC$. **(3p)**

b) Avem $MP = AP - AM = \frac{b}{2} - \frac{b}{3} = \frac{b}{6}$ şi $PB = AB - AP = \frac{2b}{3} - \frac{b}{2} = \frac{b}{6}$. Rezultă $MP = PB$. Dar $SP = PC$. Deducem că $BCMS$ este paralelogram. **(2p)**
$CP \perp AD$, ca mediană în triunghiul echilateral $\triangle ADC$. Atunci $BCMS$ este romb. **(1p)**

c) $AV \| BC$, cu $AV < BC$, deci patrulaterul $ABCV$ este trapez. **(1p)**
Avem $AT = \frac{b}{3} = AM$. Atunci $\triangle AMT$ este echilateral. Ca urmare, $MT = AM = BM$, deci $\triangle ATB$ este dreptunghic în T. Astfel, $ABCV$ este trapez ortodiagonal. **(1p)**
$TC = AB > BT$, deci $ABCV$ este trapez neisoscel. **(1p)**

4. $ABCD$ este un paralelogram în care $AC = 2AD$. Fie E simetricul lui A faţă de B şi $\{F\} = EO \cap BC$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Construim $FM \| AC$, cu $M \in (AB)$.

a) Arătaţi că $CM \perp BD$.

b) Calculaţi $\mathcal{A}_{ABCD}$ ştiind că $BD = 5$cm şi $CM = 4$cm.

Dorina Rapcea

Soluţie.

a) În ΔACE, CB şi EO sunt mediane concurente în F, deci F este centrul de greutate al triunghiului. Rezultă $\frac{BF}{CF} = \frac{1}{2}$.
În ΔABC, $MF \| AC$; conform teoremei lui Thales, avem $\frac{BF}{CF} = \frac{BM}{AM}$. Obţinem $\frac{BM}{AM} = \frac{1}{2}$.
În ΔABC, $\frac{CB}{CA} = \frac{AD}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{BM}{AM}$. Atunci, conform reciprocei teoremei bisectoarei, $(CM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$. Cum ΔBOC este isoscel, deducem $CM \perp BD$. **(4p)**

b) Fie $BD \cap CM = \{N\}$. Conform T.F.A., $\triangle CND \sim \triangle MNB$, de unde $\frac{CN}{MN} = \frac{CD}{MB}$.
Dar $\frac{CD}{MB} = \frac{AB}{MB} = 3$. Obţinem $\frac{CN}{CM} = \frac{CN}{CN + MN} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, de unde $CN = 3$cm.
Atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{BCD} = BD \cdot CN = 15\text{cm}^2$. **(3p)**