OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VII-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Se consideră numărul $a=\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că: $\frac{1}{4}<a\le\frac{1}{3}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic „Octavian Goga”Huedin

Subiectul II.(30 puncte)

În triunghiul ΔABC, bisectoarea $[AE$, $E\in(BC)$ intersectează mediana $[BF]$, $F\in(AC)$, în punctul G.

a) Să se determine $a\in\mathrm{N}$, astfel încât $\frac{BG}{GF}\cdot\frac{CE}{BE}=2^a$.

b) Dacă triunghiurile ΔAGF și ΔBGE sunt echivalente, atunci G este centrul de greutate al ΔABC.

prof. Elena Măgdaş, Şcoala Gimnazială Horea Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

În trapezul ABCD, $AB\parallel CD$, BC=12cm. Bisectoarele unghiurilor B și C se întâlnesc în E pe (AD). Dacă segmentul care unește mijloacele diagonalelor trapezului are lungimea 4 cm, arătați că AC<22 cm.

prof. Vasile Şerdean , Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla

Subiectul IV.(20 puncte)

Să se arate că pentru orice număr natural n diferit de zero, 35^n se poate scrie ca diferență de două pătrate.

prof. Vasile Şerdean , Şcoala Gimnazială nr. 1 Gherla

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. ***SUCCES!***
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

P-ța Ștefan cel Mare nr. 4, Cluj - Napoca
Tel: +40 (0) 264 590 778, Fax: +40 (0) 264 592 832
www.isjcj.ro ,cluj@isjcj.ro

Barem clasa a VII-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

$a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots-\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n(2n+1)}\right)=$
$\frac{1}{4}\cdot\frac{n(2n+1)+1}{n(2n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n}$ **(10 p)**

$\frac{1}{4}<\frac{1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n}\Leftrightarrow 2n^2+n<2n^2+n+1$ "A" **(5 p)**

$\frac{1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+1}{2n^2+n}\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 6n^2+3n+3\leq 8n^2+4n\Leftrightarrow 2n^2+n\geq 3\Leftrightarrow n(2n+1)\geq 3$ "A" **(5 p)**

Subiectul II. (30 puncte)

Desen corect **(5 p)**

a) $[AE$ bisectoare $\Rightarrow\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}$ **(5 p)**

$[AG$ bisectoare $\Rightarrow\frac{BG}{GF}=\frac{AB}{AF}\Rightarrow\frac{BG}{GF}=\frac{AB}{\frac{AC}{2}}\Rightarrow\frac{BG}{GF}=\frac{2AB}{AC}$; $\frac{BG}{GF}\cdot\frac{CE}{BE}=\frac{2AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=2\Rightarrow a=1.$ **(5 p)**

b) $A_{\Delta BEG}=A_{\Delta BEA}-A_{\Delta BGA}$

$A_{\Delta AGF}=A_{\Delta BFA}-A_{\Delta BGA}\Rightarrow A_{BEA}=A_{\Delta AFB}\Rightarrow\frac{BA\cdot EM}{2}=\frac{BA\cdot FN}{2}\Rightarrow EM=FN$ **(10 p)**

$EM\perp AB, FN\perp AB\Rightarrow EM\parallel FN\Rightarrow EF\parallel AB, F$ mijlocul segmentului $AC\Rightarrow E$ mijlocul segmentului $BC\Rightarrow G$ centrul de greutate al ΔABC. **(5 p)**

Subiectul III. (20 puncte)

Desen corect **(5 p)**

$[CE,[BE$ sunt bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle ECB)+m(\sphericalangle EBC)=180^\circ:2=90^\circ\Rightarrow m(\sphericalangle CEB)=90^\circ$ **(5 p)**

F este mijlocul lui (BC) $\Rightarrow FE=\frac{BC}{2}=6=FB=FC\Rightarrow\Delta EFB$ isoscel

$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\sphericalangle FEB\equiv\sphericalangle FBE\\ dar\sphericalangle ABE\equiv\sphericalangle FBE\end{array}\right\}\Rightarrow\sphericalangle FEB\equiv\sphericalangle ABE\Rightarrow EF\parallel AB$ **(5 p)**

Deci EF este linie mijlocie $AB+CD=12$, dar $AB-CD=8$, deci AB=10
În $\Delta ABC, AC<AB+BC=22cm$ **(5 p)**

Subiectul IV. (20 puncte)

Dacă n este impar, n=2k+1, atunci $35^{2k+1}=35^{2k}\cdot 35=35^{2k}(36-1)=\left(35^k\cdot 6\right)^2-\left(35^k\right)^2$ **(10 p)**

Dacă n este par, n=2k, atunci $35^{2k}=35^{2k-2}\cdot 35^2=35^{2k-2}\cdot 1225=35^{2k-2}\cdot\left(37^2-12^2\right)=\left(35^{k-1}\cdot 37\right)^2-\left(35^{k-1}\cdot 12\right)^2$ **(10 p)**