OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

CLASA a IX-a

Problema 1.

a) Arătaţi că $x^3 - 3x + 2 \geq 0, (\forall) x > 0$.

b) Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c \in [0,1]$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a}{b+c^3+7} + \frac{b}{c+a^3+7} + \frac{c}{a+b^3+7} \leq \frac{1}{3}.$$

Problema 2.

Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, cu $a_1 = 1$, pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{3}{a_1 \cdot a_2} + \frac{5}{a_2 \cdot a_3} + \frac{7}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{2n+1}{a_n \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 3.

Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AD), N \in (BC), P \in (MN)$, astfel încât $\frac{BN}{BC} + 2 \cdot \frac{AM}{AD} = 2$ şi $\frac{PN}{PM} = 2$. Arătaţi că punctele B, P, D sunt coliniare.

Problema 4.

În interiorul unui triunghi ascuţitunghic ABC se consideră punctul M. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle BMC, \sphericalangle AMC, \sphericalangle AMB$ intersectează laturile BC, AC, respectiv AB în punctele D, E, respectiv F.

a) Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct P.

b) Arătaţi că $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PD}$.

c) Arătaţi că $\frac{PA}{PD} + \frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} \geq 6$. Cine este punctul M în cazul în care avem egalitate?

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

BAREM DE CORECTARE
CLASA a IX-a

Problema 1.

a) Arătaţi că $x^3 - 3x + 2 \geq 0, (\forall) x > 0$.

b) Arătaţi că pentru orice numere reale $a, b, c \in [0,1]$, este adevărată inegalitatea:

$\frac{a}{b+c^3+7} + \frac{b}{c+a^3+7} + \frac{c}{a+b^3+7} \leq \frac{1}{3}$.

Soluţie şi barem:

a) $(x-1)(x^2+x-2) \geq 0$ **2p**

$(x-1)^2(x+2) \geq 0, (\forall)\, x > 0$ **1p**

b) $\frac{a}{b+c^3+7} \leq \frac{a}{b+3c+5} = \frac{a}{b+3c+2+3} \leq \frac{a}{b+3c+3a+2b} = \frac{a}{3(a+b+c)}$ **2p**

$\frac{b}{c+a^3+7} \leq \frac{b}{3(a+b+c)}$; $\frac{c}{a+b^3+7} \leq \frac{c}{3(a+b+c)}$ **1p**

$\frac{a}{b+c^3+7} + \frac{b}{c+a^3+7} + \frac{c}{a+b^3+7} \leq \frac{a+b+c}{3(a+b+c)} = \frac{1}{3}$ **1p**

Problema 2.

Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$, cu $a_1 = 1$, pentru care este adevărată egalitatea:

$\frac{3}{a_1 \cdot a_2} + \frac{5}{a_2 \cdot a_3} + \frac{7}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{2n+1}{a_n \cdot a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie şi barem:

$n = 1 \Longrightarrow \frac{3}{a_2} = 1 - \frac{1}{a_2} \Longrightarrow a_2 = 4$ **1p**

$n = 2 \Longrightarrow \frac{3}{4} + \frac{5}{4a_3} = 1 - \frac{1}{a_3} \Longrightarrow a_3 = 9$ **1p**

Presupunem $a_k = k^2$ şi demonstrăm că $a_{k+1} = (k+1)^2$ **2p**

Din ipoteză avem $1 - \frac{1}{a_k} + \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{k+1}} \Longrightarrow \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k}$. **1p**

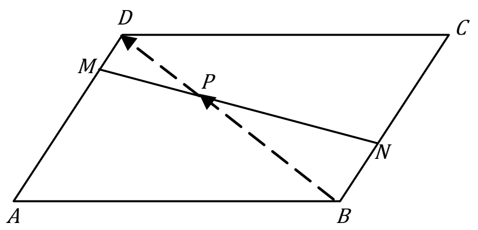
$a_{k+1} = a_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. **1p**

În concluzie $a_n = n^2$, pentru orice n număr natural nenul. **1p**

Problema 3.

Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AD), N \in (BC), P \in (MN)$, astfel încât $\frac{BN}{BC} + 2 \cdot \frac{AM}{AD} = 2$ şi $\frac{NP}{PM} = 2$. Arătaţi că punctele B, P, D sunt coliniare.

Soluţie şi barem:



a) Notăm $\frac{BN}{BC} = k$ şi $\frac{AM}{AD} = m$ şi avem $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{BC}$ **2p**

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NM}$ **1p**

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\left(-k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + m\overrightarrow{BC}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{BP} = \frac{k+2m}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$, de unde rezultă că punctele B, P, D sunt coliniare **1p**

Problema 4.

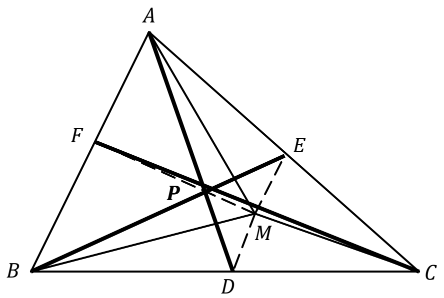
În interiorul unui triunghi ascuţitunghic ABC se consideră punctul M. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle BMC, \sphericalangle AMC, \sphericalangle AMB$ intersectează laturile BC, AC, respectiv AB în punctele D, E, respectiv F.

a) Arătaţi că dreptele AD, BE şi CF sunt concurente într-un punct P.

b) Arătaţi că $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PD}$.

c) Arătaţi că $\frac{PA}{PD} + \frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} \geq 6$. Cine este punctul M în cazul în care avem egalitate?

Soluţie şi barem:



a) Din teorema bisectoarei, rezultă $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC}$, $\frac{EC}{EA} = \frac{MC}{MA}$ şi $\frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MB}$. **2p**

$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1$; rezultă $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$. **1p**

b) ΔABD şi transversala $F - P - C \Longrightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{PD}{PA} = 1 \Longrightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{CD}{BC}$. **1p**

ΔADC şi transversala $E - P - B \Longrightarrow \frac{EA}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{PD}{PA} = 1 \Longrightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{BD}{BC}$. Rezultă în continuare: $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{PA}{PD}\left(\frac{CD}{BC} + \frac{BD}{BC}\right) = \frac{PA}{PD}$. **1p**

c) $\frac{PA}{PD} = \frac{MA}{MB} + \frac{MA}{MC}$; $\frac{PB}{PE} = \frac{MB}{MC} + \frac{MB}{MA}$; $\frac{PC}{PF} = \frac{MC}{MA} + \frac{MC}{MB}$. **1p**

$\frac{PA}{PD} + \frac{PB}{PE} + \frac{PC}{PF} = \left(\frac{MA}{MB} + \frac{MB}{MA}\right) + \left(\frac{MB}{MC} + \frac{MC}{MB}\right) + \left(\frac{MC}{MA} + \frac{MA}{MC}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$. Avem egalitate dacă şi numai dacă $MA = MB = MC$, adică M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. **1p**