Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a VIII-a

1.

a) Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{x^2-2x}-\frac{4x+12}{(x+3)(x+2)(x-2)}+\frac{x^2}{x^2+2x}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{x}\right)$.

Arătaţi că suma E(1) + E(3) + E(5) + … +E(2015) este pătrat perfect.

a) Rezolvaţi în mulţimea Z ecuaţia: $x^2+y^2-8x+6y+24=0$.

2.

a) Se consideră numărul $a=\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

i) Calculaţi a^2

ii) Calculaţi $\left(a+2\sqrt{2}\right)^{2015}$

b) Unui număr cu 2015 cifre i se schimbă ordinea cifrelor în mod arbitrar. Este posibil ca modulul diferenţei dintre cele două numere să fie egal cu 2015?

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$**,** punctele M, N, P sunt respectiv mijloacele segmentelor CC', $A'D'$ şi $C'D'$.

a) Aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreptele BM şi NP

b) Dacă muchia cubului este 6 cm, aflaţi aria triunghiului $A'BM$.

4. Fie ABCD un dreptunghi cu AB > BC. În punctul A se ridică perpendicular pe planul dreptunghiului, pe care se consideră punctul M. Fie P şi Q proiecţiile punctelor D respectiv B pe MC. Să se arate că $MC\cdot QP=AB^2-AD^2$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Barem de corectare

1. a)	$x \in R - \{-3;-2;0;2\}$	**1 p**
	$E(x)=\left[\frac{2x}{x(x-2)}-\frac{4(x+3)}{(x+3)(x+2)(x-2)}+\frac{x^2}{x(x+2)}\right]\cdot\frac{x^2-4}{x}$	**1 p**
	$E(x)=\left(\frac{2}{x-2}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}+\frac{x}{x+2}\right)\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x}$	
	$E(x)=x$	**1 p**
	$E(1)+E(3)+...+E(2015)=1+3+5+...+2015=1008^2$	**1 p**
1. b)	$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=1 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=1$	**1 p**
	$(x-4)^2;(y+3)^2 \in N, \forall x, y \in Z$	**1 p**
	$(x, y) \in \{(3;-3);(5;-3);(4;-4);(4;-2)\}.$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2. a)	**i)** $a^2=(5-2\sqrt{6})-2\sqrt{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}+(5+2\sqrt{6})$	**1 p**
	$a^2=8$	**1 p**
	ii) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})}<\sqrt{(5+2\sqrt{6})} \Rightarrow a<0 \Rightarrow a=-2\sqrt{2}$	**1 p**
	$(a+2\sqrt{2})^{2015}=0$	**1 p**
	Cele două numere au aceeaşi sumă a cifrelor, deci dau acelaşi rest prin împărţire la 3(sau 9)	**1 p**
	Diferenţa lor este multiplu întreg de 3 (sau 9), deci modulul diferentei este multiplu de 3 (sau 9)	**1 p**
	2015 nu este multiplu de 3	**1 p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3. a)	Notăm cu l muchia cubului şi cu O centrul bazei ABCD. Fie Q mijlocul [DD'] $AQ \parallel BM; NP \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(BM,NP) \equiv \sphericalangle(AQ,AC) \equiv \sphericalangle CAQ$	**1 p**
	$\Delta QDA \equiv \Delta QDC\ (CC) \Rightarrow QA=QC \Leftrightarrow \Delta QAC \text{ isoscel} \Rightarrow QO \perp AC$	**1 p**
	$TP\ \Delta QDA \Rightarrow AQ=\frac{l\sqrt{5}}{2}$	**1 p**

	$\Delta QOA: \cos(\sphericalangle CAQ) = \dfrac{AO}{AQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	**1 p**
3. b)	$A'B = 6\sqrt{2}$ cm; $BM = 3\sqrt{5}$ cm; $A'M = 3\sqrt{3}$ cm	**1 p**
	$\left.\begin{array}{l}\text{Construim } B'S \perp BM;\ A'B' \perp (B'BC) \overset{T3P}{\Rightarrow} A'S \perp BM \\ A_{B'BM} = 18cm^2 = \dfrac{BM \cdot B'S}{2} \Rightarrow B'S = \dfrac{12}{\sqrt{5}} cm \\ TP\ \Delta A'B'S \Rightarrow A'S = \dfrac{18}{\sqrt{5}} cm\end{array}\right\}$	**1 p**
	$A_{A'BM} = 27\ cm^2$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4.	$T3P:\ MB \perp BC,\ MD \perp DC$	**4 p**
	$TCatetei\ \Delta MDC si\ \Delta MBC \Rightarrow DC^2 = MC \cdot PC = AB^2$ si $BC^2 = MC \cdot NC = AD^2$.	**2 p**
	$AB^2 - AD^2 = MC(PC - NC) = MC \cdot PN$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof. REBIC CAMELIA – Şcoala Gimnazială „Lucian Blaga" Satu Mare