



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2018

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI - a

Problema 1.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$.

- Demonstrați că $a \geq 0$.
- Pentru $a = 0$, trasați graficul funcției.
- Arătați că funcția f este continuă dacă și numai dacă este surjectivă.

SOLUȚIE:

- Valoarea minimă a restricției funcției la intervalul $(-\infty, 1]$ este $f(-1) = a - 1$. Această valoare minimă trebuie să fie cel puțin egală cu -1 , prin urmare $a \geq 0$ 2p
- Graficul este format dintr-o semidreaptă și o porțiune de parabolă, care vor fi trasate. 2p
- Funcția f este continuă pe \mathbb{R} dacă și numai dacă este continuă în $x_0 = 1$, condiție care revine la faptul că $a = 0$. Pe de altă parte, f este surjectivă dacă și numai dacă $f(-1) = -1$, adică, din nou, $a = 0$ 3p

Problema 2.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

- Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $XA = AX$.
- Rezolvați în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația $X^3 = A$.

SOLUȚIE:

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$; atunci $XA = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$ și $AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$.

Ipoteza $XA = AX$ este îndeplinită dacă și numai dacă $a = d$ și $b = c$, deci matricele căutate sunt cele de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$ 2p

b) Dacă $X^3 = A$, atunci $XA = X^4 = AX$, prin urmare X este de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Obținem că $a^3 + 3ab^2 = 1$, $3a^2b + b^3 = 1$ 2p

Scăzând aceste două relații, deducem că $(a - b)^3 = 0$, prin urmare $a = b$ 1p

Atunci $a^3 = \frac{1}{4}$, de unde $a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\varepsilon^2 \right\}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

În concluzie, găsim trei soluții ale ecuației matriceale. 2p

Problema 3.

Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUȚIE:

Observăm că $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty$, prin urmare dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției f 2p

Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, nu există asimptote orizontale la graficul funcției f 1p

Avem că: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 1} - x \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} (\sqrt{x^2 + 1} - x) + x (e^{\frac{1}{x}} - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = 0 + 1 = 1$; rezultă că dreapta de ecuație

$y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru graficul funcției f 2p

Analog se arată că dreapta de ecuație $y = -x - 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ pentru graficul funcției f .
 2p

Problema 4.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ are determinantul egal cu 1.

- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice B al cărei determinant să fie egal cu 0?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice C al cărei determinant să fie egal cu -1 ?
- Schimbând între ele două dintre elementele lui A , putem obține o matrice D al cărei determinant să aibă o altă valoare decât 0, 1 sau -1 ?

SOLUȚIE:

Notăm, ca de obicei, cu a_{ij} elementul din matricea A situat la intersecția liniei i cu coloana j .

a) Da: schimbăm între ele elementele a_{12} și a_{22} 2p

b) Da: schimbăm între ele elementele a_{11} și a_{31} 2p

c) Nu: dacă cele două zerouri sunt pe aceeași linie sau pe aceeași coloană, determinantul matricei D va fi egal cu 0 (vor exista două linii/coloane identice); dacă cele două zerouri se află pe linii și coloane diferite, determinantul matricei D va fi egal cu 1 sau -1 (în dezvoltarea determinantului, trei dintre cele șase produse vor fi egale cu 0, iar celelalte trei vor fi egale cu 1 și nu pot avea toate trei același semn). 3p