MATEMATIKA OLIMPIÁSZ
KÖRZETI SZAKASZ

2014. február 23.

X. OSZTÁLY

(4 órás program)

1.) **a.)** Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{(x-1)(x-2)}+2^{3x-x^2}=5$ exponenciális egyenletet!

b.) Az A-ban derékszögű ABC háromszög befogóinak hossza b és c, melyekre teljesül a $2\lg\frac{b+c}{\sqrt{6}}=\lg b+\lg c$ egyenlőség. Számítsd ki a C szög mértékét!

2.) Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$; $a,b\in\mathbb{R}$ szürjektív függvényeket!

3.) **a.)** Oldd meg a komplex számok halmazán a $z^8-77z^4-324=0$ egyenletet!

b.) Ábrázold a komplex számsíkban az egyenlet gyökeinek megfelelő pontokat!

c.) Kösd össze az origót körbejárva az előbbi pontokat, majd számítsd ki a keletkezett „csillag” kerületét és területét!

4.) Adottak az $A=\left\{z\in C\,\middle|\,\left|z-1-\sqrt{3}\right|\le 2\right\}$ és $B=\left\{z\in C\,\middle|\,|z|\le\sqrt{2}\right\}$ halmazok. Legyen M_A illetve M_B azon pontok halmaza a komplex számsíkban, amelyek affixumai az A illetve B halmaz elemei. Számítsd ki az $S=M_A\cap M_B$ síkidom területét!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

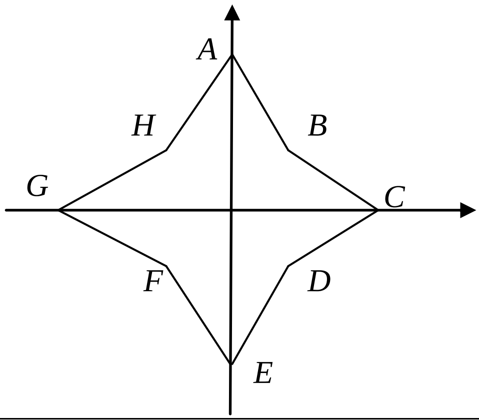
CLASA A X-A

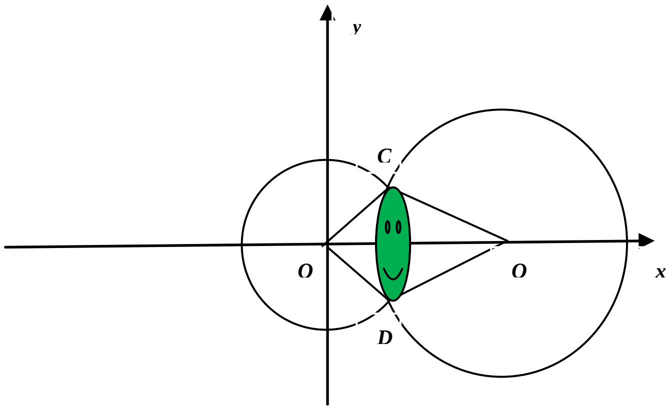
Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$2^{(x-1)(x-2)}+2^{3x-x^2}=5\Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2}+\frac{4}{2^{x^2-3x+2}}=5$	**1p**
	Cu substituţia $t=2^{x^2-3x+2}$ obţinem ecuaţia $t^2-5t+4=0$ cu rădăcinile 1 şi 4.	**1p**
	Ecuaţia $2^{x^2-3x+2}=1$ are soluţiile 1 şi 2. Ecuaţia $2^{x^2-3x+2}=4$ are soluţiile 0 şi 3. Mulţimea soluţiilor $S=\{0,1,2,3\}$.	**2p**
b.)	$2\lg\frac{b+c}{\sqrt{6}}=\lg b+\lg c\Leftrightarrow \lg\left(\frac{b+c}{\sqrt{6}}\right)^2=\lg bc$	**1p**
	$\Leftrightarrow\frac{b^2+2bc+c^2}{6}=bc\ \Leftrightarrow\ \frac{2bc}{a^2}=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 2\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\Leftrightarrow 2\sin C\cos C=\frac{1}{2}$	**1p**
	$\Leftrightarrow\sin 2C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2C=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{12}$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	f este surjectivă dacă $Imf=[-1,1]$	**1p**
	$Imf=\{y\in\mathbb{R}\mid\exists x\in\mathbb{R},\ f(x)=y\}$	**1p**
	Rezultă $\operatorname{Im} f=\left[\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2},\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right]$.	**4p**
	Din sistemul $\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=-1$ şi $\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=1$ se obţin soluţiile $a=2,\ b=0$ respectiv $a=-2,\ b=0$	**2p**
	Funcţiile căutate sunt: $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ şi $f(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$.	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Cu substituţia $z^4=t$ obţinem o ecuaţie de gradul doi cu rădăcinile 81 şi –4.	**1p**
	Rezolvând ecuaţiile binome $z^4=81$ şi $z^4=-4$ obţinem mulţimea soluţiilor $S=\{3,\ 3i,\ -3,\ -3i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i\}$.	**3p**

b.)		**2p**
c.)	Perimetrul “steluţei” *ABCDEFGH* este alcătuit din 8 segmente congruente de lungime $\sqrt{5}$, deci perimetrul este $P=8\sqrt{5}$.	**1p**
	Aria poate fi calculată ca suma ariei pătratului *BDFH* şi ariilor a patru triunghiuri echilaterale congruente $A=2^2+4\cdot\frac{2\cdot 2}{2}=12$.	**2p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
		**2p**
	Suprafaţa *S* este „smile”-ul haşurat delimitat de câte un arc ale cercurilor $C\left(O,\sqrt{2}\right)$şi $C(Q,2)$.	**1p**
	$A_S=A_{\text{sector}COD}+A_{\text{sector}CQD}-A_{\Delta COD}-A_{\Delta CQD}$	**1p**
	$OC=\sqrt{2}$, $CQ=2$, $OQ=1+\sqrt{3}$ $\Rightarrow \text{m}(\angle COQ)=45^\circ$, $\text{m}(\angle CQO)=30^\circ$ şi $z_C=1+i$	**2p**
	$A_{\text{sector}COD}=\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$, $A_{\text{sector}CQD}=\frac{1}{6}\pi\cdot 2^2=\frac{2\pi}{3}$	**1p**
	$A_{\Delta COD}+A_{\Delta CQD}=2\cdot\frac{OQ\cdot\frac{CD}{2}}{2}=1+\sqrt{3}$	**1p**
	$A_S=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-1-\sqrt{3}=\frac{7\pi}{6}-1-\sqrt{3}$	**1p**