Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală a judeţului Alba, 19 februarie 2016
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VIII-a

Problema 1. **a) Arătaţi că: $\sqrt{x-\sqrt{8x}+6} \geq 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}_+$**

b) Determinaţi a şi b astfel încât: $\frac{4}{\sqrt{a-\sqrt{8a}+6}+\sqrt{b-\sqrt{12b}+7}} \in \mathbb{N}$.

Soluţie:

a) $x-\sqrt{8x}+6=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2+4 \geq 4$ 2p

de unde $\Rightarrow \sqrt{x-\sqrt{8x}+6} \geq 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}_+$ 1p

b) Analog $\sqrt{a-\sqrt{8a}+6}=\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)^2+4} \geq 2$ 1p

$\sqrt{b-\sqrt{12b}+7}=\sqrt{\left(\sqrt{b}-\sqrt{3}\right)^2} \geq 2$ 1p

$\Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{8x}+6}+\sqrt{b-\sqrt{12b}+7} \geq 4$ 1p

Pentru ca fracţia să fie nr. natural $\Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{2}=\sqrt{b}-\sqrt{3}=0 \Rightarrow x=2\ şi\ y=3$ 1p

Problema 2. **În cubul ABCDA'B'C'D', lungimea diagonalei unei feţe este de $10\sqrt{2}cm$.**
Punctul M aparţine dreptei AB astfel încât A este mijlocul segmentului $[MB]$. Calculaţi:
a) distanţa de la punctul M la planul$(D'BD)$
b) măsura unghiului $\sphericalangle[AB',(BDD')]$.
c) tangenta unghiului diedru determinat de planele $(MA'C)$ şi (BCB').

Soluţie:

a) În ΔBMD: AD – înălţime şi mediană, $m[\sphericalangle(DBA)]=45° \Rightarrow \Delta MDB - dr.is. \Rightarrow MD \perp DB$ (1) 1p

dar $MD \perp DD' \overset{(1)}{\Rightarrow} MD \perp (D'DB) \Rightarrow d[M,(D'DB)]=MD=BD=10\sqrt{2}cm$ 1p

b) Fie $AC \cap BD=\{O\}, AO \perp BD$ şi $AO \perp DD' \Rightarrow AO \perp (BDD')$ 1p

$\Rightarrow \sphericalangle[AB',(BDD')]=\sphericalangle AB'O$. Cum $AO=\frac{AC}{2}=\frac{AB'}{2} \Rightarrow m\left(\widehat{AB'O}\right)=30°$ 1p

c) Fie $MA' \cap BB'=\{P\} \Rightarrow \Delta MBP - dr.is. \Rightarrow BP=BM=20cm$ 1p

$MB \perp (BCC');\ fie\ BQ \perp CP;\ BQ, CP \subset (BCC') \overset{T_3\perp}{\Longrightarrow} MQ \perp CP$

Cum $(MA'C) \cap (BCC')=PC \Rightarrow \sphericalangle[(MA'C),(BCB')]=\sphericalangle(BQM)$ 1p

Se calculează $CP=10\sqrt{5}cm, BQ=4\sqrt{5}cm, \Rightarrow tg\widehat{BQM}=\frac{MB}{BQ}=\sqrt{5}$ 1p

Problema 3. **Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se arate că:**

a) $\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} \geq \frac{2x-y}{3xy}$

b) $\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)}+\frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)}+\frac{z^2}{x(z^2+xz+x^2)} \geq \frac{xy+yz+xz}{3xyz}$.

Soluție:

a) $\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} \geq \frac{2x-y}{3xy} \mid \cdot y \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{2x-y}{3x}$ 1p

$3x^3 \geq (2x-y)(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$ 1p

Cum $(x-y)^2 \geq 0; x+y \geq 0, (\forall)x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$ 1p

b) folosim rezultatul de la punctul a) și obținem:

$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} \geq \frac{2x-y}{3xy}$; $\frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)} \geq \frac{2y-z}{3yz}$; $\frac{z^2}{x(z^2+xz+x^2)} \geq \frac{2z-x}{3zx}$ 2p

Adunăm membru cu membru cele trei inegalități:

$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} + \frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)} + \frac{z^2}{x(z^2+xz+x^2)} \geq \frac{2x-y}{3xy} + \frac{2y-z}{3yz} + \frac{2z-x}{3zx}$ 1p

Aducem la același numitor și obținem:

$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} + \frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)} + \frac{z^2}{x(z^2+xz+x^2)} \geq \frac{xz+xy+yz}{3xyz}$ 1p

Problema 4. Fie prisma triunghiulară regulată dreaptă ABCA'B'C' cu AB = 2a și AA' = a.

a) Arătați că perimetrul triunghiului ACB' este mai mare decât perimetrul patrulaterului BCC'B'.

b) Demonstrați că suprafețele ACB' și BCC'B' sunt echivalente.

c) Dacă B'E este bisectoarea unghiului A'B'B, E ∈ AB și M este mijlocul lui $[BC]$, demonstrați că A'C' ∥ $(B'ME)$.

Soluție:

a) $\Delta B'BA \equiv \Delta B'BC\ (C.C.) \Rightarrow [B'A] \equiv [B'C] \Rightarrow \Delta B'AC - isoscel$

În $\Delta B'BA$: $m(\sphericalangle B) = 90° \stackrel{T.P.}{\Longrightarrow} B'A = a\sqrt{5} \Rightarrow P_{\Delta ACB'} = 2(1+\sqrt{5})a$ (1) și $P_{BCC'B'} = 6a$ (2) 1p

Avem $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 1+\sqrt{5} > 3 \Rightarrow 2(1+\sqrt{5}) > 6 \xRightarrow{(1)+(2)} P_{\Delta ACB'} > P_{BCC'B'}$ 1p

b) Din $T_3 \perp \Rightarrow B'F \perp AC$, F ∈ (AC) ⟹ B'F = 2a (T.P. în $\Delta AFB'$)

$A_{\Delta ACB'} = \frac{AC \cdot B'F}{2} = 2a^2$ (3)

$A_{BCC'B'} = BC \cdot CC' = 2a^2$ (4) $\xRightarrow{(3)+(4)} A_{\Delta ACB'} = A_{BCC'B'}$ 2p

c) Fie (B'E – bisectoarea $\sphericalangle A'B'A \Rightarrow$ m($\sphericalangle A'B'E$) = m($\sphericalangle EB'B$) = 45° ⟹ $\Delta EBB'$ – dr. is. ⟹ EB = BB' = a

AB = 2a ⟹ AE = AB – BE = a ⟹ AE = EB ⟹ E – mijlocul lui $[AB]$

M – mijlocul lui $[BC]$ ⟹ EM – linie mijlocie în ΔABC 1p

Finalizare A'C' ∥ $(B'ME)$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.