OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

Determinaţi numărul natural nenul n astfel încât $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+......+\frac{2}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$.

SUBIECTUL II

Un pătrat cu latura de 4 cm este împărţit în 16 pătrățele cu latura de 1 cm . În fiecare dintre pătrăţele putem scrie exact unul din numerele $0, \sqrt{2015}$ şi $-\sqrt{2015}$. Se folosesc toate cele trei numere .

După această completare, calculăm sumele de pe fiecare coloană, de pe fiecare linie și de pe cele două diagonale.

a) Demonstrați că cea mai mică sumă posibilă ce se poate obține este număr irațional.
b) Se poate completa pătratul astfel încât toate sumele considerate să fie egale ? Exemplificați.
c) Se poate completa pătratul astfel toate sumele considerate să fie diferite ? Justificați.

SUBIECTUL III

Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri consecutive dintr-un paralelogram.

SUBIECTUL IV

ABCD este un paralelogram în care punctele E și F sunt mijloace pentru laturile [AB], respectiv [AD]. Dacă segmentele [EC] și [FC] au aceeași lungime, demonstrați că ABCD este romb.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii;*
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
Nu se acordă puncte din oficiu;
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14.02.2015

CLASA a VII-a
BAREM

SUBIECTUL I

$\frac{5-3}{3\cdot5}+\frac{7-5}{5\cdot7}+......+\frac{n-(n-2)}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$ 2p

$\frac{5}{3\cdot5}-\frac{3}{3\cdot5}+\frac{7}{5\cdot7}-\frac{5}{5\cdot7}+......+\frac{n}{(n-2)\cdot n}-\frac{(n-2)}{(n-2)\cdot n}=\frac{332}{999}$ 2p

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+....................+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}=\frac{332}{999}$ 1p

$\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\frac{332}{999}\Rightarrow\frac{1}{3}-\frac{332}{999}=\frac{1}{n}$ 1p

$\frac{1}{999}=\frac{1}{n}\Rightarrow n=999$ 1p

SUBIECTUL II

a) Cea mai mică sumă posibilă ce se poate obține este $-4\sqrt{2015}$...2P
Se arată că $\sqrt{2015}$ este irațional apoi folosim faptul că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este număr irațional...1P

b) Este posibil

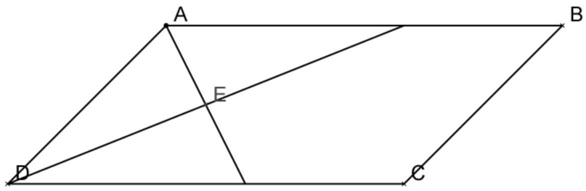
0	$\sqrt{2015}$	$-\sqrt{2015}$	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	$-\sqrt{2015}$	$\sqrt{2015}$	0

....2P

c) Nu este posibil. În fiecare din sume participă numerele $0, \sqrt{2015}$ și $-\sqrt{2015}$. Rezultă că sumele posibile sunt $-4\sqrt{2015}, -3\sqrt{2015}, -2\sqrt{2015}, -\sqrt{2015}, 0, \sqrt{2015}, 2\sqrt{2015}, 3\sqrt{2015}, 4\sqrt{2015}$, exact 9 numere...1P
Cum avem 10 sume rezultă conform principiului lui Dirichlet că cel puțin două sume sunt egale..1P

SUBIECTUL III

Considerăm paralelogramul $ABCD$ şi bisectoarele unghiurilor $\angle BAD, \angle ADC$ ce se intersectează în punctul E, conform desenului.



$\angle BAD$ și $\angle ADC$ unghiuri consecutive…………………………………....1 punct

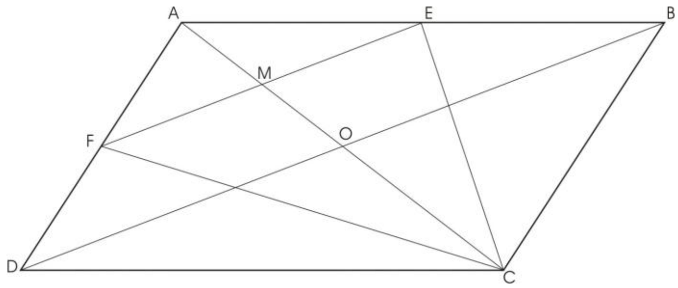
$m(\angle BAD)+m(\angle ADC)=180^\circ$ ……………………………….…………. 2 puncte

$$m(\angle EAD)+m(\angle EDA)=\frac{1}{2}m(\angle BAD)+\frac{1}{2}m(\angle ADC)=\frac{1}{2}\left[m(\angle BAD)+m(\angle ADC)\right]=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

……………….……………………………………………………………………….2 puncte

$m(\angle AED)=180^\circ-\left[m(\angle EAD)+m(\angle EDA)\right]=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ …………..2 puncte.

SUBIECTUL IV



În triunghiul ABD, [FE] este linie mijlocie (pe baza definiției). 1p

Deci, FE ∥ BD.

În triunghiul ADO, [FM] este linie mijlocie (pe baza teoremei reciproce). 1p

În triunghiul ABO, [EM] este linie mijlocie (pe baza teoremei reciproce).

ABCD paralelogram $\Rightarrow [DO]\equiv[OB]$ 1p

Rezultă că $FM=\frac{DO}{2}$ și analog $EM=\frac{OB}{2}$, ceea ce conduce la FM = ME. 1p

În triunghiul FEC isoscel, [CM] este mediană, deci și înălțime. 1p

CM ⊥ FE și FE ∥ BD ⇒ CM ⊥ BD. 1p

Paralelogramul cu diagonalele perpendiculare este romb. 1p