



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9, f(x) = x^2$. Să se determine submulțimile nevide A ale lui \mathbb{Z}_9 cu proprietatea $f(A) = A$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $G = \{X_a \in M_2(\mathbb{R}) / X_a = I_2 + aA, a > -1\}$. Demonstrați că G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor, izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale.

3. Dacă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție care admite primitive, demonstrați că pentru orice primitivă F a sa există $c \in \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$f(c) \cdot \sin F(c) = c^{2015}.$$

4. Calculați:

a) $\int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}};$

b) $\lim_{x \searrow 0} \int_x^1 \frac{dt}{t \sqrt[3]{t^2+1} + \sqrt[3]{t(t^2+1)^2} + \frac{t^2+1}{\sqrt[3]{t}}}.$

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).

Timp de lucru: 3 ore

Soluții clasa a XII-a:

$$1. f(\hat{0}) = \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{1}, f(\hat{2}) = \hat{4}, f(\hat{3}) = \hat{0}, f(\hat{4}) = \hat{7}, f(\hat{5}) = \hat{7}, f(\hat{6}) = \hat{0}, f(\hat{7}) = \hat{4}, f(\hat{8}) = \hat{1}.$$

Rezultă că $f(\mathbb{Z}_9) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$, deci $A = f(A) \subseteq \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$.

Cum $f(\hat{0}) = \hat{0}$ și $f(\hat{1}) = \hat{1}$, rezultă că $\hat{0}$ și $\hat{1}$ se pot afla într-o submulțime A cu proprietatea $f(A) = A$.

Deoarece $f(\hat{4}) = \hat{7}$ și $f(\hat{7}) = \hat{4}$, rezultă că elementele $\hat{4}$ și $\hat{7}$ se află sau nu se află simultan într-o submulțime A cu proprietatea $f(A) = A$.

În consecință $A = \{\hat{0}\}, A = \{\hat{1}\}, A = \{\hat{0}, \hat{1}\}, A = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{7}\}, A = \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$ sau $A = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$.

$$2. X_a \cdot X_b = I_2 + aA + bA + abA^2, (\forall) a, b > -1. \text{ Cum } A^2 = A \text{ obținem:}$$

$$X_a \cdot X_b = I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + aA + bA + abA = I_2 + (a + b + ab)A = X_{a+b+ab}, (\forall) a, b > -1.$$

Cum $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1 > -1, \forall a, b > -1$, rezultă că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

Înmulțirea matricelor este asociativă.

$X_a \cdot X_b = X_{a+b+ab} = X_{b+a+ba} = X_b \cdot X_a, (\forall) a, b > -1$, deci înmulțirea matricelor este comutativă pe G .

Elementul neutru este $I_2 = X_0 \in G$.

Inversul elementului $X_a \in G$ este elementul $X_{\frac{a}{a+1}} \in G$.

În concluzie G este grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

Considerăm funcția $f: G \rightarrow \mathbf{R}, f(X_a) = \ln(a + 1)$.

Se verifică ușor că f este bijectivă și

$f(X_a \cdot X_b) = f(X_{a+b+ab}) = \ln(a + b + ab + 1) = \ln(a + 1) + \ln(b + 1) = f(X_a) + f(X_b), \forall X_a, X_b \in G$, deci f este izomorfism de la grupul (G, \cdot) la grupul $(\mathbf{R}, +)$.

$$3. \text{ Considerăm funcția } g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -\cos F(x) - \frac{x^{2016}}{2016}, \text{ pentru care}$$

avem $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty$ (1). Presupunem prin absurd că funcția g este injectivă.

Cum g este continuă, rezultă că g este monotonă, ceea ce contrazice (1).

Așadar g nu este injectivă și deci există $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, astfel că $g(a) = g(b)$. Deoarece funcția g este derivabilă, conform teoremei lui *Rolle* există $c \in (a, b)$ astfel încât $g'(c) = 0$, de unde rezultă relația cerută în enunț.

$$4. a) \int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt = \int \sqrt[3]{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)'}{\sqrt[3]{t^2+1}} dt =$$

$$= \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(t^2+1)^2} + C.$$

b) Se dă factor comun forțat pe $t\sqrt[3]{t^2+1}$ și se obține pentru $t > 0$:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt[3]{t^2+1} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)^2} \right)} = \int \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{t\sqrt[3]{t^2+1} \left(\frac{t^2+1}{t^2} - 1 \right)} = \int \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{t\sqrt[3]{t^2+1} \left(\frac{1}{t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt.$$

$$\int_x^1 \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt = \int_x^1 \sqrt[3]{t} dt - \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{(t^2+1)'}{\sqrt[3]{t^2+1}} dt = \left(\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(t^2+1)^2} \right) \Big|_x^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+1)^2}.$$

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} (2 - \sqrt[3]{4}).$$

Barem de corectare

Clasa a XII-a

Problema 1	Oficiu 1p
a) $f(\hat{0}) = \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{1}, f(\hat{2}) = \hat{4}, f(\hat{3}) = \hat{0}, f(\hat{4}) = \hat{7}, f(\hat{5}) = \hat{7}, f(\hat{6}) = \hat{0}, f(\hat{7}) = \hat{4}, f(\hat{8}) = \hat{1}$	2p
$f(\mathbb{Z}_9) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$	1p
$A = f(A) \subseteq \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$	1p
$f(\hat{0}) = \hat{0}$, rezultă elementul $\hat{0}$ poate fi în submulțimea A	1p
$f(\hat{1}) = \hat{1}$, rezultă elementul $\hat{1}$ poate fi în submulțimea A	1p
$f(\hat{4}) = \hat{7}$, $f(\hat{7}) = \hat{4}$, rezultă că elementele $\hat{4}$ și $\hat{7}$ se află sau nu se află simultan în submulțimea A	1p
$A = \{\hat{0}\}, A = \{\hat{1}\}, A = \{\hat{0}, \hat{1}\}, A = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{7}\}, A = \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$ sau $A = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{7}\}$	2p
TOTAL	10p

Problema 2	Oficiu 1 p
$X_a \cdot X_b = X_{a+b+ab}, \forall a, b > -1$	1 p
$a+b+ab > -1, \forall a, b > -1 \Rightarrow G$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor	1 p
Inmulțirea matricelor este asociativă	1p
$X_a \cdot X_b = X_{a+b+ab} = X_{b+a+ba} = X_b \cdot X_a, \forall a, b > -1$	1p
Elementul neutru este $I_2 = X_0 \in G$	1p
Inversul elementului $X_a \in G$ este elementul $X_{\frac{a}{a+1}} \in G$	1p
Considerăm funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(X_a) = \ln(a+1)$	1p
f este bijectivă	1p
$f(X_a \cdot X_b) = f(X_a) + f(X_b), \forall X_a, X_b \in G$	1p
TOTAL	10p

Problema 3**Oficiu 1p**

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = -\cos F(x) - \frac{x^{2016}}{2016}$$

1 p

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\infty \quad (1)$$

1p

 g nu este injectivă

3p

există $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, astfel că $g(a) = g(b)$

1p

Finalizare (Aplicarea teoremei lui Rolle)

3p

TOTAL**10p****Problema 4****Oficiu 1p**

$$a) \int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt = \int \sqrt[3]{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)'}{\sqrt[3]{t^2+1}} dt =$$

2 p

$$= \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(t^2+1)^2} + C \quad (1)$$

1p

b)

$$\int \frac{dt}{t \sqrt[3]{t^2+1} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)^2} \right)} = \int \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{t \sqrt[3]{t^2+1} \left(\frac{t^2+1}{t^2} - 1 \right)} = \int \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{t \sqrt[3]{t^2+1} \left(\frac{1}{t^2} \right)} =$$

2p

$$= \int \frac{t \left(\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{t^2}} - 1 \right) dt}{\sqrt[3]{t^2+1}} = \int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt$$

$$\int_x^1 \left(\sqrt[3]{t} - \frac{t}{\sqrt[3]{t^2+1}} \right) dt = \left(\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(t^2+1)^2} \right) \Big|_x^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$$

2p

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} (2 - \sqrt[3]{4})$$

2p

TOTAL**10p**