



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



ETAPA NAȚIONALĂ
24 mai 2024

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

Subiecte Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat și $b > 0$. Pentru $x, y \in [a - b, a + b]$ se definește operația algebrică $x * y = xy - a(x + y) + a^2 + a$.

- Pentru ce valori ale lui b operația " $*$ " este lege de compoziție pe mulțimea $[a - b, a + b]$?
- Determinați numărul real b pentru care legea de compoziție " $*$ " admite element neutru.
- Pentru $b=1$ să se determine numerele naturale n pentru care ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} = x$ are trei soluții distincte în mulțimea $[a - b, a + b]$.

Subiectul 2.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = \frac{X^n}{n-1} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{X^2}{2 \cdot 1} - 1$ și $g = X - 1$.

- Să se arate că f este divizibil cu g și să se determine câtul q al împărțirii polinomului f la g .
- Arătați că pentru $n \geq 4$ polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.
- Dacă $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția polinomială asociată polinomului q , să se arate că $\int_0^1 Q'(x)(x-1)dx > \frac{-n}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n .

Subiectul 3.

Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

- Să se arate că $J_2 < J_1$.
- Să se verifice egalitatea $4I_0 - 3\pi I_1 = 0$.
- Demonstrați că $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n .

Subiectul 4.

Un parc are suprafața delimitată de graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$ și $g(x) = -5$.

- Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficele celor două funcții.
- Calculați aria parcului.
- Știind că o alee paralelă cu axa Ox împarte suprafața parcului în două suprafețe de arii egale, să se determine ordonata punctului prin care trece aleea.