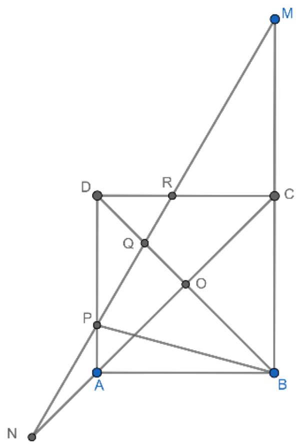
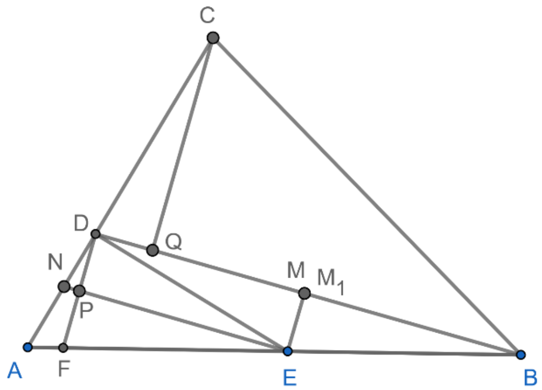
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 8 februarie 2025
BAREM DE CORECTARE
Clasa a VII-a

Problema 1	
a) a = $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} + \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \sqrt{5} + 2$	1p
b = $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9+1}{2}} - \sqrt{\frac{9-1}{2}} = \sqrt{5} - 2$	1p
$M_a = \frac{a+b}{2} = \sqrt{5}$ și $M_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{5-4} = 1$	1p
b) N=$(9+4\sqrt{5})^{2025} \cdot (9-4\sqrt{5})^{2025} \cdot (9-4\sqrt{5}) + \frac{1}{(9-4\sqrt{5})} + 2\sqrt{3} - 3 + 4 - 2\sqrt{3}$	2p
N= $(81-80)^{2025} \cdot (9-4\sqrt{5}) + \frac{9+4\sqrt{5}}{81-80} + 1$	1p
N= $9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} + 1 = 19$ număr prim	1p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
a) $-1 < \sqrt{13} - 4 < 0 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{13} < 4 \Leftrightarrow 9 < 13 < 16$ adevărat	1p
$[\sqrt{13} - 4] = -1$	1p
$\{\sqrt{13} - 4\} = \sqrt{13} - 4 - [\sqrt{13} - 4] = \sqrt{13} - 4 - (-1) = \sqrt{13} - 3$	1p
b) Deoarece $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$	1p
Rezultă $[\sqrt{n^2+n+1}] = n, \ \forall n \geq 1$	1p
Atunci $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99$	1p
Obținem $S = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$	1p
TOTAL	**7p**

Problema 3



Fie $MN \cap CD = \{R\}$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Δ MCR dreptunghic cu m $(\widehat{C})$ =90° și m $(\widehat{CMR})$= 30° ⇒ MR = 2 · RC Δ PDR dreptunghic cu m $(\widehat{D})$ =90° și m $(\widehat{DPR})$= 30° ⇒ PR = 2 · DR Prin adunarea celor 2 relații avem: MR + PR = 2 (RC + DR) ⇒ MP= 2 · DC = 2 · BC = MB Δ MPB isoscel și m $(\widehat{PMB})$= 30° ⇒ m $(\widehat{MPB})$= 75° (1) În patrulaterul CRQO, m $(\widehat{CRQ})$= 120°, m$(\widehat{RCO})$= 45°, m $(\widehat{O})$= 90° ⇒ m $(\widehat{RQO})$= 105° ⇒ m $(\widehat{BQP})$= 75° (2) Din (1) și (2) ⇒ $\widehat{BQP} \equiv \widehat{BPQ}$ ⇒ Δ BPQ isoscel ⇒ BP ≡ BQ .	1p 1p 2p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 4  	
a) m $(\widehat{ACB})$= 75°, deci triunghiul BCD este isoscel și m $(\widehat{CBD})$= 30°. Construim $EM_1 \perp BD$, $M_1 \in BD$ și $CQ \perp BD$, $Q \in BD$. Atunci $\Delta BEM_1 \equiv \Delta CDQ$ (I.U.), de unde rezultă $CQ = BM_1$ Cum CQ este cateta opusă unghiului de 30° în triunghiul dreptunghic CQB, obținem că BD=BC=2CQ=$2BM_1$, prin urmare EM_1 este înălțime și mediană în triunghiul EBD, acesta fiind astfel isoscel, deci DE =2cm, iar M=M_1.	1p 1p 1p
b) m $(\widehat{ABD})$= 45° - 30° =15°, deci m $(\widehat{BED})$= 180°-30°=150°. Atunci m $(\widehat{AED})$= 30° și m $(\widehat{NED})$= 15° ⇒ m $(\widehat{NEM})$= m $(\widehat{NED})$+ m $(\widehat{DEM})$ =90°. m $(\widehat{ADF})$ = m $(\widehat{DCQ})$ = 15° ⇒ CQ|| FD și FD ⊥BD. Astfel, m $(\widehat{NEM})$= m $(\widehat{EMD})$= m $(\widehat{MDP})$= 90° de unde m $(\widehat{DPE})$= 360° - 3· 90° = 90° ⇒ patrulaterul DMEP este dreptunghi.	1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**