Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iași
14.02.2014

CLASA a XI-a

Problema 1.

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 1}$**, dacă** $x_1 = a \in \mathbb{R}$ **și** $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, **pentru orice** $n \geq 1$.

Problema 2.

Fie $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ **astfel încât** $\det(A) = 1$. **Să se arate că :** $\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = 5$.

Problema 3.

Fie *G* **mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3 care au elementele egale cu** -1 **sau** 1.

a) **Câte elemente are mulțimea** *G* **?**

b) **Determinați mulțimea** $\{\det(A) \mid A \in G\}$.

Problema 4.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2^2} + \ldots + \frac{1}{n+2^n}\right) = 0$.

Timp de lucru:3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

REZOLVĂRI ȘI BAREME
CLASA a XI-a

Problema 1.

Să se studieze convergența șirului $(X_n)_{n\geq 1}$, **dacă** $x_1 = a \in \mathbb{R}$ **și pentru orice** $n \geq 1$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$.

Rezolvare

Cum $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0, (x_n)$ **este crescător.**	**1p**
Dacă $a \in (0,1)$ **se obține că** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.	**2p**
Dacă $a \in \{0,1\}$, $x_n = 1$ **oricare ar fi** $n \geq 1$.	**2p**
Dacă a<0 sau a>1 se obține $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.	**2p**

Problema 2.

Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ **astfel încât detA=1. Să se arate că:** $\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = 5$.

Rezolvare

Dacă α, β **sunt valorile proprii ale matricei A, atunci** $\alpha\beta = 1$	**2p**
$\det(A^2 + A - I_2) = (\alpha^2 + \alpha - 1)(\beta^2 + \beta - 1)$	**2p**
$\det(A^2 + I_2) = (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)$	**1p**
$\det(A^2 + A - I_2) + \det(A^2 + I_2) = (\alpha^2 + \alpha - 1)(\beta^2 + \beta - 1) + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta -$ $-\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\beta - \alpha - \beta^2 - \beta + 1 + (\alpha\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1 = 5.$	**2p**

Problema 3.

Fie G mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3 care au elementele egale cu -1 sau 1.

a) **Câte elemente are mulțimea G?**
b) **Determinați mulțimea** $\{\det A \mid A \in G\}$.

Rezolvare

a) **O matrice din G are 9 elemente, fiecare dintre ele putând lua 2 valori (-1 sau 1). Mulțimea G are** $2^9 = 512$ **elemente.** **2p**
b) **Fie** $A \in G$ **. Din definiția unui determinant de ordinul 3 obținem că det(A) este o sumă cu 6 termeni de tipul** $(\pm 1)\cdot(\pm 1)\cdot(\pm 1)$, **deci** $-6 \le \det(A) \le 6$ **.**

Adunând linia 1 la liniile 2 și 3 obținem det(A)=det(B) unde B este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0,-2 sau 2. Scoatem factorul comun 2 de pe liniile a doua și a treia și atunci det(A)=4det(C), unde C este o matrice care are pe prima linie -1 sau 1, iar pe liniile a doua și a treia are 0,-1 sau 1. Cum det(C)$\in \mathbb{Z}$ **deduce că 4 divide det(A), prin urmare det(A)**$\in$ **{-4, 0, 4}.** **3p**

Fie $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **și** $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **. Evident** $A_1, A_2, -A_2 \in G$ **și** $\det(A_1) = 0$, $\det(A_2) = 4$, $\det(-A_2) = -4$ **. În concluzie, {det(A)|A**$\in G$**}={-4, 0, 4}.** **2p**

Problema 4.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+2^n}\right) = 0.$

Rezolvare

Cu inegalitatea mediilor avem:

$$0 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+2^n} \le \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{n\cdot 2^n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2^n}}\right).$$ **3p**

Utilizăm teorema Stolz-Cesaro și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ **și avem:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2^n}}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}}}{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^{n+1}}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 0$$ **3p**

Teorema cleștelui ne asigură că limita cerută este 0. **1p**

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.