MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Naţional de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

14 decembrie 2024

MATEMATICĂ

IX

Problema I (10 puncte)

Un teren de antrenament pentru atletism are forma unui triunghi ABC. Doi copii, X și Y, se află într-un punct S din interiorul triunghiului. Viteza de alergare a lui X este de două ori mai mare decât viteza de alergare a lui Y.

Antrenorul propune următoarea întrecere: prin tragere la sorți, unul dintre copii primește dreptul de a alege unul dintre vârfurile A, B sau C ale triunghiului. Apoi, X trebuie să alerge în linie dreaptă până când ajunge în vârful ales, iar Y trebuie să alerge pe aceeași direcție, dar în sens contrar, până când atinge latura opusă vârfului ales. Câștigă cel care ajunge primul la destinația dorită.

Arătați că, indiferent care este poziția punctului S, copilul care câștigă tragerea la sorți are posibilitatea de a alege un vârf al triunghiului în așa fel încât să nu piardă întrecerea.

Soluţie.

Pe laturile triunghiului considerăm punctele $D, E \in (AB)$, $F, G \in (BC)$ și $H, I \in (AC)$ astfel încât $AD = DE = EB$, $BF = FG = GC$, iar $CH = HI = IA$. **(1p)**

Considerăm că cel care alege vârful este X. Punctul S se află în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile AEH, BDG sau CFI (sau chiar a două dintre ele, situație în care selectăm, la întâmplare, unul); să spunem că este situat în interiorul sau pe laturile triunghiului AEH. Copilul X va alege, în acest caz, vârful A. **(2p)**

Dacă dreapta AS intersectează dreptele EH și BC în punctele P, respectiv Q, atunci $\frac{SA}{SQ} \le \frac{PA}{PQ} = 2$, deci $SA \le 2SQ$.

Înseamnă că X va ajunge în A cel târziu în momentul în care Y ajunge în Q, așadar nu pierde jocul. **(2p)**

Considerăm că cel care alege vârful este Y. Punctul S se află în interiorul sau pe laturile unuia dintre trapezele $BCHE$, $CADG$ sau $ABFI$ (sau chiar a două dintre ele, situație în care selectăm, la întâmplare, unul); să spunem că este situat în interiorul sau pe laturile trapezului $BCHE$. Copilul Y va alege, în acest caz, vârful A. **(2p)**

Dacă dreapta AS intersectează dreptele EH și BC în punctele P, respectiv Q, atunci $\frac{SA}{SQ} \ge \frac{PA}{PQ} = 2$, deci $SA \ge 2SQ$.

Înseamnă că Y va ajunge în Q cel târziu în momentul în care X ajunge în A, așadar nu pierde jocul. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Se consideră n numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ cu proprietatea că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)}.$$

Demonstrați că toate cele n numere reale sunt nenegative.

Soluţie.

Presupunem prin reducere la absurd că printre cele n numere reale există unul negativ. Fără a restrânge generalitatea, să spunem că acesta este a_n; atunci $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. **(2p)**

Din inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz, $\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)\left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right) \ge \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right)^2$. **(2p)**

Atunci $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \le \left|a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right| \le \sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)} \le \sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)}$. **(3p)**

Deducem că $\sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \le \sqrt{(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2\right)}$, contradicție. **(2p)**