

Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean Vrancea
Centrul Metodic Focșani I

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală -09.02.2013
Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Fie multimea $A = \{ \sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2013} \}$.

Aflați $\text{card. } A \cap \mathbb{N}$. Justificați rezultatul.

b) Să se determine numerele naturale x și y care sunt soluții ale ecuației

$$x + |25 - y| = 2013 - 10^y$$

SUBIECTUL 2

Se considera numerele $B = b000\dots0b$, unde cifra zero apare de $2n+1$ ori.

Demonstrați că \sqrt{B} este număr irațional.

Gazeta matematică nr.6-7-8/ 2012.

SUBIECTUL 3

Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[AM] \equiv [AN]$ și

$[BN] \equiv [CM]$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL 4

În triunghiul isoscel ABC cu baza BC , punctul S este mijlocul segmentului AB și

P este mijlocul segmentului AC . Considerăm punctele $M \in (SB)$ și $N \in (PA)$ astfel

încât $[BM] \equiv [AN]$ și $\{Q\} = MN \cap SP$.

a) Arătați că $[MQ] \equiv [NQ]$.

b) Demonstrați că $MN > \frac{BC}{2}$

Subiecte selectate de prof. N. Avrigeanu

Scoala D. Zamfirescu Focșani

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

CLASA VIIA

- 1.a) $\text{Card.}A \cap N = 45$ si justificare.....2p
- b) $x \geq 0, |25-y| \geq 0$ 1p
- $2013-10^y \geq 0 \Rightarrow y \in \{0,1,2,3\}$2p
- $x \in \{1987,1979,1890, 991\}$1p
- $(x,y) \in \{(1987,0), (1979,1), (1890,2), (991,3)\}$1p
2. Trebuie demonstrat ca B nu este patrat perfect1p
- $b \in \{2,3,7,8\}$, B nu este patrat perfect..... 1p
- $b=1, B=(10^{n+1})^2 + 1$ nu este patrat perfect.....2p
- $b \in \{4,9\} \Rightarrow b(10^{2n+2} + 1)$ nu este p.perfect.....1p
- $b=5$ atunci B este divizibil cu 5 , dar nu este divizibil cu 5^2 si nu e p.perf..... 1p
- $b=6$ atunci B este divizibil cu 3 ,dar nu este divizibil cu 3^21p
3. Fie $BP \parallel MN, P \in NC$2p
- $\triangle ABP$ este isoscel.....1p
- MNPB este trapez isoscel.....2p
- $MP=NB=MC$1p
- $P=C$,deci ABC este triunghi isoscel.....1p
4. a) Fie $MD \parallel SP, D \in (AC)$1p
- $NP=PD \Rightarrow PQ$ este l. mijl. in $\triangle NMD \Rightarrow MQ=QN$2p
- b)Fie $NE \perp MD, E \in MD$1p
- SPEM este paralelogram.....1p
- $ME=SP \Rightarrow ME = \frac{BC}{2}$ 1p
- $ME < MN \Rightarrow MN > \frac{BC}{2}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI VRANCEA
CENTRUL METODIC FOCȘANI II

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală- 09.02.2013

Clasa a VII-a

1. Arătați că dacă p este număr prim diferit de 2 și 5, atunci $p^4 - 1$ se divide cu 10.

(G.M. 4/2012-
E14333)

2. Arătați că:

a) $A =$

b) $B =$

3. Fie dreptunghiul ABCD și M,N,P,Q respectiv mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [AD].

a) Demonstrați că MNPQ este romb.

b) Dacă arătați că

4. Fie triunghiul ABC și (AD bisectoarea , unde . Fie , unde .
Demonstrați că :

a)

b)

Subiect propus de:

Prof. Florin Slujitoru

Prof. Andrei

Seceleanu

BAREM DE CORECTARE

1. p =prim, p , p 2puncte
.....2puncte
.....2puncte
..... 1punct
2. a) 1punct
.....1punct
nu este pătrat perfect
.....1punct
- b)1punct
.....1punct
.....1punct
- $B = -4$ B 1punct
3. a) linie mijlocie în1 punct
linie mijlocie în1 punct
linie mijlocie în1 punct
linie mijlocie
 $AC=BD$ $MN=NP=PQ=MQ$ $MNPQ$ – romb1 punct
- b) $PC = BM$ și $PCBM$ – paralelogram1 punct
dar $PCBM$ – dreptunghi 1 punct
: (Cf. T. Thales)1 punct
4. a) $(AD$ bisectoarea1 punct
și AD – secantă (alterne interne)1 punct
- isoscel 2 puncte
- b) $(AD$ bisectoarea (Cf. teoremei bisectoarei) 1 punct
În (Cf. T. Thales)1 punct
.....1 punct



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală-9 februarie 2013-
CLASA a VII-a

1. Fie $X = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{7^2} + \sqrt{7^3} + \dots + \sqrt{7^{100}}}{8\sqrt{7} + 56}$

Arătați că $X \in \mathbb{N}$.

2. Printr-un punct P al laturii (BC) al triunghiului ABC se duce paralela la mediana $[AD]$ a triunghiului ($D \in BC$), care intersectează dreapta AB în M și dreapta AC în N . Arătați că

- a). $AM \cdot AC = AN \cdot AB$
- b). $MP + NP = 2 \cdot AD$

Clubul matematicienilor, editura ART

3. Fie M și N două puncte distincte, interioare unui triunghi ascuțitunghic ABC . Să se arate că există cel puțin un punct D pe una din laturile triunghiului astfel încât $MD + ND$ să ia valoarea cea mai mică posibilă (minimă).

4. Fie x, y numere naturale nenule astfel încât :

$$9^{(x-2)} + 9^{(y+2)} \leq 2 \cdot 3^{(x+y)}.$$

Demonstrați ca $3^x + 3^y$ se divide cu 41.

(E:14375 din GM 2012)

Subiecte selectate și propuse de
Prof. **Sontica Ion**
Liceul Teoretic „Grigore Gheba„-DUMITREȘTI
Prof. **Fogoroș Liviu**
Școala Gimnazială „Duliu Zamfirescu” Dumbrăveni
Prof. **Vioreanu Marius**
Școala Gimnazială –Bordești

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii
Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp de lucru 3 ore



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală-9 februarie 2013

CLASA a VII-a

Barem de corectare

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1

$X = \frac{\sqrt{7} + 7 + 7\sqrt{7} + 7^2 + 7^2\sqrt{7} + \dots + 7^{50}}{8\sqrt{7} + 56}$	1p
$X = \frac{(7 + \sqrt{7}) + 7(7 + \sqrt{7}) + \dots + 7^{49}(7 + \sqrt{7})}{8(\sqrt{7} + 7)}$	1p
$X = \frac{(\sqrt{7} + 7)(1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{49})}{8(\sqrt{7} + 7)}$	2p
$X = \frac{(1 + 7) + 7^2(1 + 7) + \dots + 7^{48}(1 + 7)}{8}$	2p
$X = 1 + 7^2 + \dots + 7^{48} \in N$	1p

2.

$\triangle BAD \sim \triangle BMP \quad \frac{MP}{AD} = \frac{BP}{BD}$	2p
$\triangle CNP \sim \triangle CAD \quad \frac{NP}{AD} = \frac{PC}{DC}$	2p
$MP = AD \cdot \frac{BP}{BD} \quad NP = AD \cdot \frac{PC}{DC}$	2p
$MP + NP = AD \left(\frac{BP}{BD} + \frac{PC}{DC} \right) = 2AD$	1p

3.

Realizarea desenului pentru triunghiul ABC	0,25 p
Identificarea punctelor M, N și D pe desen	0,25 p
Construim $MT \perp BC$, $T \in (BC)$ și $MT = TP$, M, T, P colineare în această ordine	4x0,25p
Scrierea relației $MD + DN = PD + DN$, dacă $D \in (BC)$	2x0,5 p
În triunghiul PDN avem relația $MD + DN > PN$ și $\min(MD + DN) = PN$	4x0,25 p
Analog pentru $D \in (AB) \Rightarrow \min(MD + DN) = QN$ unde Q și M simetrice față de AB	1,25 p
Asemănător pentru $D \in (AC) \Rightarrow \min(MD + DN) = RN$, R și M simetrice față de AC	1,25 p
Finalizare:	1,00 p

4.

$9^{(x-2)} - 2 \cdot 3^{(x+y)} + 9^{(y-2)} \leq 0$	1p
$(3^{x-2} - 3^{y+2})^2 \leq 0$	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Centrul Metodic Gugești

$3^{(x-2)} - 3^{(y+2)} = 0$	1p
$x-2 = y + 2, x= y+4$	1p
$3^x + 3^y = 3^{(y+4)} + 3^y = 3^y(3^4 + 1) = 3^y \cdot 82$	1p
$41 \text{ divide } 3^x + 3^y$	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA ZONALĂ – 9 FEBRUARIE 2013
CLASA A VII-A

1. Fie nr. ,
□i .
a). Calcula□i media aritmetică a numerelor a □i c .
b). Arăta□i că .

Culegere de probleme

2. a). Fie . Afla□i numerele întregi a □i b dacă .
b). Arăta□i că pentru , numărul este natural.

Culegere de probleme

3. Pe laturile □i ale unui triunghi ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ □i $ACFG$. Arăta□i că :
a). .
b). .
c). Mediana a triunghiului ABC □i înăl□imea a triunghiului AEG , □i sunt în prelungire.

Culegere de probleme

4. Fie ABC un triunghi oarecare ascu□itunghic □i punctele , astfel încât □i . Notăm cu .
a). Arăta□i că dacă P este mijlocul segmentului , atunci $|| AC$.
b). Calcula□i raportul ariilor triunghiurilor APM □i ABC .

G.M.11/2012

Propunător :
Prof : Sfetcu Olgu□a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE – CLASA a VII-a

Su bie ct	SOLUȚII	BAREM DE CORECT ARE
1	<p>. Se calculează , . Pentru fiecare calcul corect se atribuie câte 1,5p.</p> <p>a). Media aritmetică este egală cu .</p> <p>b). Se folosește faptul că , și apoi media aritmetică a numerelor a, c</p>	<p>0,5p</p> <p>4,5p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
2	<p>a). Se calculează Se scrie egalitatea în forma, egalitate care este echivalentă cu . Folosind reducerea la absurd rezultă că $a=-22$ și $b=-7$.</p> <p>b). Se folosește formula. Pentru aplicarea formulei în calculul numitorului se acordă 1p. Înlocuire simplificare și finalizare se acordă încă 2p</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
3	<p>a). Se compară triunghiurile BAG și EAC</p> <p>b). , , apoi în triunghiul SAB avem . În triunghiul STE : și finalizare.</p> <p>c). Se prelungește AM cu MP, $AM=MP$</p> <p>. Finalizare</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
4	<p>a). Se construiește EF paralelă cu AD. Apoi se ia , și folosind teorema lui Thales de unde rezultă că. Apoi se ia triunghiul BEF și folosind teorema lui Thales rezultă $BM=ME$, finalizare.</p> <p>b). Se folosește faptul că mediana împarte triunghiul în două triunghiuri de arii egale. . , apoi Finalizare</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1+1p</p> <p>1p</p>

OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
Clasa a VII-a

1. Determinați mulțimea: $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ab + 2a - 3b = 7\}$
2. Fie numerele $a = |2\sqrt{3} - 4|$ și $b = \sqrt{(5 - 3\sqrt{3})^2}$
 - a) Comparați cele două numere.
 - b) Calculați diferența dintre media aritmetică și semiprodusul celor două numere.
3. În triunghiul ABC, $m(\angle A) = 90^\circ$, se notează cu G intersecția înălțimii [AD], $D \in (BC)$, cu bisectoarea [CE], $E \in (AB)$. Fie $EF \perp BC$, $F \in BC$. Să se arate că:
 - a) Triunghiul AEG este isoscel.
 - b) Patrulaterul AEFG este romb.
4. Considerăm pătratul ABCD și punctele $E \in (BC)$, $F \in (DC)$. Dacă $m(\angle BAE) = 15^\circ$ și $m(\angle DAF) = 30^\circ$, determinați $m(\angle AEF)$.

(Gazeta Matematică)

Propunător : *prof. Bratu Mihaela –Liceul “Simion Mehedinți” Vidra*

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Ecuația se scrie sub forma:

$a(b+2)=7+3b$1p

Deoarece $b=-2$ nu poate să fie soluție, rezultă, că $b+2 \neq 0$1p

Deci ecuația se poate scrie sub forma: $a=$

$\frac{3b+7}{b+2}$2p

Cum $b+2 \mid 3b+7$ și $b+2 \mid b+2 \Rightarrow b+2 \mid 3b+7-3(b+2)$

$\Rightarrow b+2 \mid 1 \Rightarrow b+2 \in \{+1, -1\} \Rightarrow b \in \{-1, -3\}$2p

Dacă $b=-1$, rezultă $a=4$, și dacă $b=-3$, atunci $a=2$1p

2. a) $a=|2\sqrt{3}-4|=4-2\sqrt{3}$, ptr. că $2\sqrt{3}-4 < 0$1p

$b=|5-3\sqrt{3}|=3\sqrt{3}-5$, ptr. că $5-3\sqrt{3} < 0$1p

$4-2\sqrt{3}$?	$3\sqrt{3}-5$	
$9-2\sqrt{3}$?	$8\sqrt{3}$	
9	?	$5\sqrt{3}$	
$\sqrt{81}$	$>$	$\sqrt{75}$	$\Rightarrow a >$

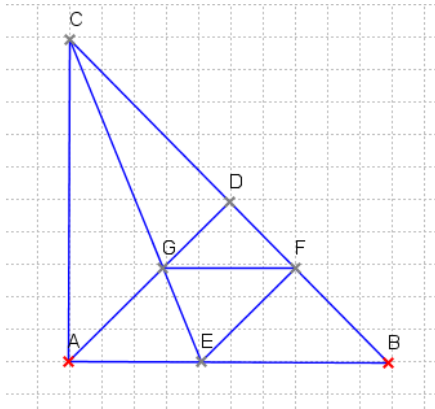
b.....2p

a) $m_a - \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a+b}{2} - \frac{a \cdot b}{2}$1p

Rezultatul final:

$\frac{-21\sqrt{3}}{2} + \frac{37}{2}$2p

3.



$\Delta ABC : m(\angle A) = 90^\circ$
 $AD \perp BC, \angle ACE \equiv \angle ECB, EF \perp BC$
 $AE \cap AD = \{G\}$

- a) ΔAGE isoscel
 b) AEGF romb

1p

$$a) \left. \begin{array}{l} AD \perp BC \\ EF \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \parallel EF \Rightarrow AG \parallel EF$$

1p

$$\left. \begin{array}{l} m(\angle GCD) + m(\angle CGD) = 90^\circ \quad (\Delta GDC) \\ \angle AGE \equiv \angle CGD \quad (\text{op. la varf}) \\ m(\angle ACE) + m(\angle AEG) = 90^\circ \quad (\Delta CAE) \\ \angle ACE \equiv \angle ECB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AGE \equiv \angle AEG \Leftrightarrow \Delta GAE \text{ isoscel, } [AG]$$

2p

$$b) AG \parallel EF, GE \text{ secanta} \Rightarrow \angle AGE \equiv \angle GEF \quad (\text{alt. interne}) \Rightarrow \angle GEF \equiv \angle AEG$$

1p

$$\left. \begin{array}{l} \Delta CAE \equiv \Delta CFE \quad (\text{IU}) \Rightarrow [AE] \equiv [EF] \\ [AG] \equiv [AE] \end{array} \right\} \text{deci } [AG] \equiv [EF]$$

1p

$$\text{Avem deci } \left. \begin{array}{l} AG \parallel EF \\ [AG] \equiv [EF] \end{array} \right\} \Rightarrow AEGF \text{ paralelogram} \left. \begin{array}{l} \\ \text{dar } [AE] \equiv [EF] \end{array} \right\} \Rightarrow AEGF \text{ romb}$$

1p

4.

DETALII REZOLVARE	BAREM ASOCIAT
Avem $m(\angle FAE) = 45^\circ$	1p
Fie $S \in (CB)$ astfel încât $B \in (CS)$ și $BS = DF$. Atunci $\square ABS \equiv \square ADF$ (c.c.).	2p
Obținem că $m(\angle EAS) = m(\angle BAS) + m(\angle BAE) = 45^\circ$, deci $\square EAS \equiv \square EAF$.	1p

De asemenea, din congruența anterioară avem și $AF=AS$, de unde deducem că $\triangle AEF \cong \triangle AES$ (L.U.L).	2p
Atunci $m(\angle AEF) = m(\angle AES) = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.	1p

Clasa a VII-a

1. a. Aflați numerele x, y, z și $t \in \mathbb{Q}$ astfel încât $2x = 5y, 4z = x, t = 8z$, iar $x+y = 146 - (z+t)$.

b. Se dă $n = (-1)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-3)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot (-5)^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-6}$. Determinați cel mai mare număr întreg nenul m astfel încât $\sqrt{2 \cdot \sqrt{n \cdot m}} \in \mathbb{Q}$.

2. Rezolvați în \mathbb{N}^* ecuația :

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{4024}{2013}$$

1. Pe laturile (AD) și (BC) ale unui paralelogram $ABCD$ de centru O se consideră punctele M , respectiv N , astfel încât $(AM) \equiv (CN)$.

a. Demonstrați că O este mijlocul segmentului (MN)

b. Dacă $MN \cap AB = \{P\}$ și $MN \cap CD = \{R\}$, atunci dreptele DP și BR sunt paralele.

2. Pe latura BC a triunghiului ABC se consider punctele D și E astfel încât $BD = DE = EC$. Mediana BB' , ($B' \in AC$) intersectează pe AD în M , iar mediana CC' , ($C' \in AB$) intersectează pe AE în N . Arătați că

a. $BMNC$ este trapez;

b. $MN = \frac{1}{4} BC$.

(GM/2012)

Propunător : prof. Daniela Sîrghie – C.N. "Al.I.Cuza "–Focșani

Clasa a VII-a
Bareme

1. a) $t = 8z, x = 4z, y = \frac{8z}{5}$

.....1p

$$x+y+z+t = \frac{73z}{5} = 146, z =$$

10.....2p

$$x = 40, t = 80, y =$$

16.....1p

b) $n = -\frac{2^{16} \cdot 3^3}{5^5}$ (1p) $\sqrt{n \cdot m} \in \mathbb{Q} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}_-$ (1p) $\Rightarrow m_{\max} = -2^2 \cdot 3 \cdot 5 = -60$ (1p)

2. $\frac{1}{1+2+3+\dots+x} = \frac{2}{x \cdot (x+1)} = 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$

.....2p

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+x} =$$

$$= 1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 1 + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

.....2p

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{4024}{2013} \Leftrightarrow 2x \cdot 2013 = 4024 \cdot (x+1)$$

.....1p

$$4026x = 4024x + 4024$$

.....1p

$$x = 4024 : 2 \Leftrightarrow x = 2012$$

.....1p

3. a) MN intersectat cu AC este O_1 .

AM și CN paralele și congruente rezulta AMCN

paralelogram.....2p

deci O_1 este mijlocul diagonalelor, deci a lui AC, deci coincide cu

O.....2p

b) PM=NR, de unde rezultă O mijlocul lui PR și BD, deci PBRD

paralelogram.....2p

deci BP și DR

paralele.....1p

4. a) Teorema lui Menelaus în triunghiul ADC cu transversala B, M, B' , implică
 $MD = 3MA \dots 2p$
 Teorema lui Menelaus în triunghiul ABE cu transversala C', C, N implică
 $AN = 3NE \dots 1p$

Reciproca teoremei lui Thales implica dreptele $MN \square i BC$
 paralele.....1p

Dar $MB \square i NC$ nu sunt paralele, rezultă $BMNC$
 trapez.....1p

b) TFA in triunghiul ADE implică

$$MN = \frac{1}{4} BC \dots 2p$$

Inspectoratul Scolar al Judetului Vrancea

OLIMPIADA DE MATEMATICA

Etapalocala Adjud-09 februarie 2013

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

Calculati: $(2+4+6+\dots+84) \cdot \left(\frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{19 \cdot 21} \right)$.

Subiectul 2.

Fie dreptunghiul ABCD, iar punctele M, N, P si Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [AD]. Demonstrati:

- MNPQ este romb;
- $MN = 3NS$, unde $\{S\} = MN \cap BP$.

Subiectul 3.

Sa se determine numerele a, b, c stiindca: $\frac{a^2}{9} = \frac{b^3}{128} = \frac{c^3}{250}$ si $\sqrt{a \cdot b \cdot c} = 4\sqrt{30}$.

Subiectul 4.

Fie ABC un triunghi dreptunghic in A cu $m(\angle B) = 60^\circ$, iar D si E pe latura BC astfel incat $m(\angle CAD) = 10^\circ$ si (AE este bisectoarea unghiului BAD). Aratati $[AD] \equiv [CE]$.

G.M.nr. 9/2012

Subiecte propuse de: prof. Dorneanu Angela, Liceul Teoretic "Emil Botta" Adjud
Nota:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru 3 ore.
- Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Barem de corectura si notare:

Subiectul 1:

$$2+4+6+\dots+84 = 2(1+2+3+\dots+42) = 2 \cdot \frac{42 \cdot 43}{2}$$

$$\frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{19 \cdot 21} = \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} = \frac{1}{7} - \frac{1}{21}$$

Finalizare: 172 (1p).

Subiectul 2.

a) MN, PQ liniimijlocii

$$MN \parallel AC \parallel PQ ; QM \parallel PN \parallel BD$$

$$MN=PQ= \frac{AC}{2} \dots\dots\dots 1$$

p

QM , PN liniimijlocii

$$QM \parallel PN \parallel BD ;$$

$$QM=PN= \frac{BD}{2} \dots\dots\dots 1p$$

ABCD paralelogram,

$$AC=BD \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare.....

1p

b) $PM \parallel NB, \Rightarrow \Delta NSB \square \Delta MSP \Rightarrow \frac{NS}{MS} = \frac{SB}{SP} = \frac{NB}{MP}$

$$N \text{ mijlocul } [BC], BN= \frac{BC}{2} = \frac{PM}{2} \Rightarrow \frac{NS}{MS} = \frac{1}{2} .$$

Subiectul 3.

$$\frac{a^2}{9} = \frac{b^3}{128} = \frac{c^3}{250} = 4k^6 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^2 = 36k^6 \Rightarrow a = 6k^3 \dots\dots\dots 1p$$

$$b^3 = 512k^6 \Rightarrow b = 8k^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$c^3 = 1000k^6 \Rightarrow c = 10k^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{a \cdot b \cdot c} = \sqrt{6k^3 \cdot 8k^2 \cdot 10k^2} = \sqrt{480k^7} \dots\dots\dots 1p$$

Prinridicare la patrat:
 $480k^7 = 480 \Rightarrow k = 1 \dots\dots\dots 1p$

Finalizare: a=6,
 b=8,c=10..... 1p

Subiectul 4.

$$m(\sphericalangle AED) = 100^\circ; m(\sphericalangle EAD) = m(\sphericalangle EDA) = 40^\circ \Rightarrow \Delta AED \text{ isoscel cu}$$

$$AE=ED \dots\dots\dots 2p$$

Construim F simetricullui E fata de AC. Fie $\{T\} = AC \cap EF$.

CT medianasiinaltime in $\Delta CEF \Rightarrow$ bisectoare $\Rightarrow \Delta CEF$ isoscel cu un unghi de $60^\circ \Rightarrow$ echilateral: $CE=CF=EF \dots\dots\dots 1p$

AT medianasiinaltime in $\Delta AEF \Rightarrow$ isoscel,
 $AE=AF \dots\dots\dots 1p$

AT bisectoare
 in $\Delta AEF \Rightarrow m(\sphericalangle EAF) = 100^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$\Delta AEF \cong \Delta EAD \Rightarrow AD=EF \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare..... 1p

**OLMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9 FEBRUARIE 2013**

Clasa a VII-a

1. Aflați valoarea numărului natural nenul n pentru care:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{2013! - 1}{2013!}$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Determinați numărul natural nenul de trei cifre \overline{abc} , scris în baza 10, știind că este pătrat perfect și că $\sqrt{\overline{abc} + 1320} \cdot \sqrt{\overline{abc}} = \overline{abc}$.

3. Fie paralelogramul ABCD, M un punct pe [BD] și $MN \parallel AB$, $N \in (AD)$, $MP \parallel AD$, $P \in (AB)$. Arătați că dacă $A_{APMN} = A_{DNM} + A_{BPM}$, atunci punctele A, M, C sunt coliniare.

G.M.Nr.1/2012

4. Fie pătratul ABCD. Se consideră punctele $N \in (AB)$, $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AN}{AB} = k$,

$\frac{CM}{AC} = \frac{k}{2}$, $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul k astfel încât $m(\angle DMN) = 90^\circ$.

Propunator,
Prof. Ticu Luminita - Scoala Mera

BAREM DE CORECTARE SI SOLUTII
CLASA A VII-A

PROBLEMA 1

$$\frac{1}{2!} = \frac{2-1}{2!} = \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \quad 1\text{p}$$

$$\frac{2}{3!} = \frac{3-1}{3!} = \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

....

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad 2\text{p}$$

Adunând aceste egalități membru cu membru, obținem:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad 2\text{p}$$

Înlocuim în egalitatea din enunț:

$$1 - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2013!-1}{2013!} \Rightarrow 1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{2013!} \Rightarrow (n+1)! = 2013! \Rightarrow n+1 = 2013 \Rightarrow$$

$$n = 2012$$

2p

PROBLEMA 2

Deoarece $\overline{abc} = p^2$, $p \in \mathbb{N}^*$, înseamnă că p este un număr natural de două cifre,
 $p \in \{10, 11, \dots, 31\}$. **1p**

Înlocuind în relația din enunț \overline{abc} cu p^2 , se obține:

$$\sqrt{p^2 + 1320p} = p^2$$

1p

De aici, $p^2 + 1320p = p^4 \Rightarrow p^4 - p^2 - 1320p = 0 \Rightarrow p(p^3 - p - 1320) = 0$. **1p**

Cum $p \in \mathbb{N}^*$, înseamnă că $p^3 - p - 1320 = 0$. **1p**

Altfel scris: $p(p^2 - 1) = 1320 \Rightarrow p(p - 1)(p + 1) = 1320$. **1p**

$p(p - 1)(p + 1)$ este produsul a trei numere naturale consecutive

1320 se poate scrie ca $10 \cdot 11 \cdot 12$ **1p**

Din acestea va rezulta că $p = 11$ și $\overline{abc} = p^2 = 121$ **1p**

PROBLEMA 3

Notam S_1 =aria $\triangle DMN$, S_2 = aria $\triangle BMP$, S =aria $\triangle ABD$ si S_p =aria paralelogramului

APMN. Din $\triangle DNM \sim \triangle DAB$ ($MN \parallel AB$) avem $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{DM}{DB}\right)^2$ sau $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{DM}{DB}$ (1) **2p**

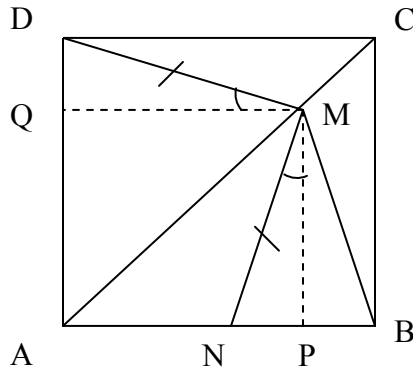
Analog $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{MB}{DB}$ (2). Din cele doua relatii obtinem $\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{DM + MB}{DB} = 1$ sau

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}. \quad \mathbf{1p}$$

Ridicam la patrat si tinem cont ca $S_1 + S_2 = S - S_p$ **2p**

Obtinem $2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \sqrt{S_p}$. Din enunt $S_p = S_1 + S_2$ si atunci $2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = S_1 + S_2$. Ridicam la patrat si obtinem $(S_1 - S_2)^2 = 0$, de unde $S_1 = S_2$. Din (1) si (2) deducem ca $DM = MB$, adica M este mijlocul diagonalei BD. Cum ABCD este paralelogram, deducem ca A, M, C sunt coliniare. **2p**

PROBLEMA 4



Construim $MP \perp AB$, $P \in (AB)$, $MQ \perp AD$,
 $Q \in (AD)$.

1p

Avem că $m(\angle PMQ) = 90^\circ$ și $APMQ$ este pătrat.

Cum $m(\angle DMN) = 90^\circ$, atunci

$$m(\angle DMQ) = m(\angle NMP)$$

1p

Considerând acum triunghiurile DMQ și NMP , avem $\angle DMQ = \angle NMP$ și $[MQ] \equiv [MP]$.

Conform cazului de congruență C.U., cele două triunghiuri vor fi congruente și de aici:

$$[DM] \equiv [MN], [DQ] \equiv [NP].$$

Dar $[DQ] \equiv [PB]$ ($ABCD$ și $APMQ$ sunt pătrate, deci DQ și PB au aceeași lungime).

Prin urmare $[NP] \equiv [PB]$.

În triunghiul ACB , conform teoremei lui Thales, avem:

$$\frac{CM}{AC} = \frac{BP}{BA} = \frac{k}{2} \Rightarrow PB = \frac{k}{2} AB$$

1p

$$NP = AB - PB - AN = AB - \frac{k}{2} AB - k \cdot AB = \frac{2-3k}{2} AB$$

1p

$$2 - 3k > 0 \Rightarrow k < \frac{2}{3}$$

$$NP = PB \Rightarrow \frac{2-3k}{2} AB = \frac{k}{2} AB \Rightarrow 2-3k = k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

1p