

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

CLASA A X-A

- 1.) a) Se calculeze $A(a, b, c) = \log_{\sqrt{c}} \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \log_{\frac{1}{c}} \frac{c}{a + b + 2\sqrt{ab}}$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $c > 1$
- b) Să se rezolve ecuația $\left\{ \log_{\sqrt{3}} [9(\sqrt{2} - 1)] + \log_{\frac{1}{3}} [3(3 - 2\sqrt{2})] \right\}^{x^2 - 3x} = \frac{1}{9}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 2.) Se dau numerele complexe $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|z_1 - z_2| = |z_2| = |z_1| \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- a) Să se calculeze $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ și $\frac{z_1}{z_2}$.
- b) Să se determine numărul $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E_n \in \mathbb{Z}$, unde $E_n = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n + \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n}$
- 3.) Pentru funcția f definită pe mulțimea numerelor naturale are loc relația $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \dots + nf(n) = n^2 f(n)$, oricare ar fi $n \geq 1$. Dacă $f(1) = 2015$, să se determine valorile numărului natural n pentru care $f(n)$ este tot număr natural.
- 4.) a) Fie A și B imaginile soluțiilor ecuației $z^2 - 13z + 72 + 30i = 0$ în planul complex. Să se calculeze aria triunghiului AOB unde O este originea sistemului cartezian.
- b) Să se reprezinte grafic în sistemul cartezian de la punctul a) mulțimea soluțiilor inecuației $|z| \leq 4$. Cât la sută din suprafața triunghiului AOB acoperă această mulțime a soluțiilor inecuației? Indicați valoarea procentului rotunjită la întreg.

Notă:**Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.****Timp de lucru 3 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

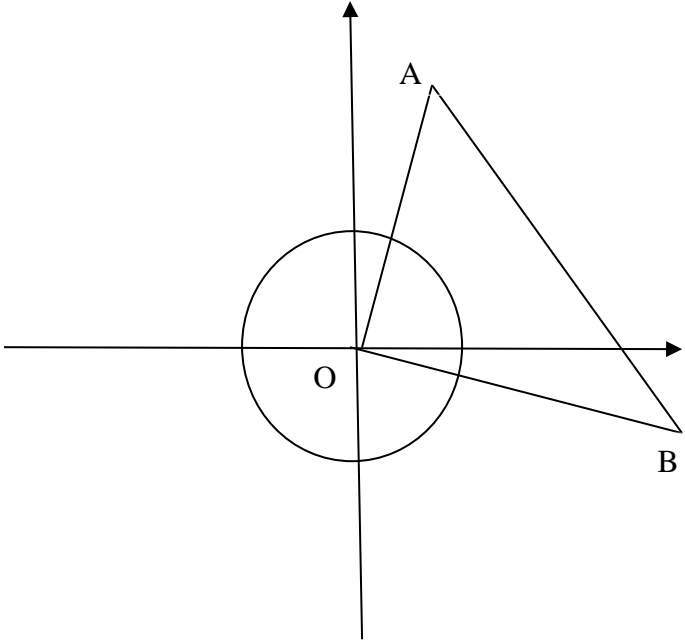
ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A X-A

1.)	Din oficiu	1p
a)	$A(a,b,c) = \log_{\sqrt{c}} \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \log_{\frac{1}{c}} \frac{c}{a+b+2\sqrt{ab}} = \frac{\log_c \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\log_c \frac{c}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}}{-1} =$	2p
	$= \log_c \frac{c^4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \log_c \frac{c}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \log_c c^3 = 3$	2p
b)	$\log_{\sqrt{3}} [9(\sqrt{2} - 1)] + \log_{\frac{1}{3}} [3(3 - 2\sqrt{2})] = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{1 + \sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}} = A(1,2,3) = 3$	2p
	Deci avem ecuația $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$ echivalentă cu ecuația de gradul doi $x^2 - 3x + 2 = 0$	2p
	Mulțimea soluțiilor este $S = \{1,2\}$	1p
2.)	Din oficiu	1p
a)	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 } = \sqrt{2}, \quad \left \frac{z_1}{z_2} - 1 \right = 1$	2p
	Rezultă că $\frac{z_1}{z_2}$ este afixul intersecției cercului cu centrul în origine și raza $\sqrt{2}$ și a cercului cu centrul în punctul de coordonate $(1, 0)$ și raza 1. Cele două cercuri au două puncte comune $A(1,1)$ și $B(1,-1)$ de unde rezultă că $\frac{z_1}{z_2} \in \{1+i, 1-i\}$.	3p
b)	$E_n = (1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$	2p
	$E_n = 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$	2p
3.)	Din oficiu	1p
	Scriem relația dată pentru $(n+1)$ și scădem cele două relații obținând $(n+1)f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1) - n^2 f(n) \Leftrightarrow n^2 f(n) = n(n+1)f(n+1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1$	4p
	Scriem aceste relații pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ și le înmulțim $\Rightarrow f(n) = \frac{1}{n} f(1) \Rightarrow f(n) = \frac{2015}{n}$	3p
	Numerele căutate sunt divizorii lui 2015. Deoarece $2015 = 1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ $\Rightarrow n \in \{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}$	2p

4.)	Din oficiu	1p
a)	$\Delta = -119 - 120i = (5 - 12i)^2, z_1 = 9 - 6i, z_2 = 4 + 6i$	2p
	$AB = z_1 - z_2 = 13, AO = z_1 = 3\sqrt{13}, BO = z_2 = 2\sqrt{13}.$	2p
	Rezultă că $OA^2 + OB^2 = AB^2$ deci triunghiul AOB este dreptunghic cu aria $A_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = 39$	2p
		1p
b)	Deoarece unghiul AOB este unghi drept, rezultă că sectorul circular care acoperă triunghiul este un sfert din discul cu aria 4π , ceea ce reprezintă 32,2..% adică rotunjit la întreg, 32%- din aria triunghiului AOB .	2p