Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a X-a

1.

a) Să se arate că $\lg^2(xy) \le 2(\lg^2 x + \lg^2 y),\ \forall x, y \in (1,\infty)$

b) Fie $x, y, z, t \in (1,\infty)$ astfel încât $\lg(xy)\sqrt{\lg z \lg t} + \lg(zt)\sqrt{\lg x \lg y} = 4$. Să se arate că $\lg^2 x + \lg^2 y + \lg^2 z + \lg^2 t \ge 4$.

2. Fie $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil şi H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, DEF, EFA. Să se arate că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

3.

a) Să se arate că funcţia $f:(0,\infty) \to R,\ f(x) = \sqrt[4]{x} + \log_{2015} x$ este injectivă.

b) Să se rezolve în R ecuaţia: $\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - \sqrt[6]{(2014-x)\sqrt{2014-x}} = \log_{2015}(\frac{2014}{x} - 1)$.

4.

a) Să se arate că $|z|^2 = z \cdot \bar{z},\ \forall z \in C$.

b) Fie $z_1, z_2 \in C$ astfel încât $|z_1| = |z_2|$ şi $3|z_1 + z_2| \ge |5z_1 + z_2|$. Să se arate că $z_1 = z_2$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Barem de corectare

1. a)	a) Inegalitatea se scrie $(\lg x+\lg y)^2 \le 2(\lg^2 x+\lg^2 y) \Leftrightarrow (\lg x-\lg y)^2 \ge 0$	**3 p**
1. b)	Notând $\lg x=a, \lg y=b, \lg z=c, \lg t=d,$ rezultă că $a,b,c,d \in (0,\infty)$ şi $(a+b)\sqrt{cd}+(c+d)\sqrt{ab}=4.$ Inegalitatea de demonstrat devine $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4. (*)$	**1 p**
	Folosind inegalităţile $u+v \le \sqrt{2(u^2+v^2)}$ şi $\sqrt{uv} \le \frac{u+v}{2} \le \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}$ valabile $\forall u,v \ge 0,$ rezultă $4=(a+b)\sqrt{cd}+(c+d)\sqrt{ab} \le \sqrt{2(a^2+b^2)}\sqrt{\frac{c^2+d^2}{2}}+\sqrt{2(c^2+d^2)}\sqrt{\frac{a^2+d^2}{2}}$	**1 p**
	Rezultă $4 \le 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \le (a^2+b^2)+(c^2+d^2),$ adică relaţia $(*)$ are loc.	**2 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2.	Alegem originea sistemului în O, centrul cercului circumscris hexagonului şi notăm cu litere mici corespunzătoare afixele punctelor considerate.	**1 p**
	Cum H_1, H_2, H_3, H_4 sunt respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, DEF, EFA, aplicând teorema lui Silvester, scrisă în complex, rezultă $h_1=a+b+c$ şi analoagele $h_2=b+c+d,\ h_3=d+e+f,\ h_4=e+f+a.$	**2 p**
	Din aceste relaţii avem: $h_1+h_3=a+b+c+d+e+f$ (1)	**1 p**
	$h_2+h_4=a+b+c+d+e+f$	**1 p**
	Din (1) şi (2) obţinem că $h_1+h_3=h_2+h_4$, de unde rezultă că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.	**2 p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3. a)	Funcţia f este strict crescătoare ca sumă de funcţii strict crescătoare	**1 p**
	Rezultă că f este injectivă	**1 p**
3. b)	Se impun condiţiile: $x \ge 0,\ 2014-x \ge 0$ şi $\frac{2014}{x}-1>0.$ Rezultă $x \in (0,2014)=D.$	**1 p**
	Din $\sqrt[6]{x\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{1}{4}}$ rezultă $\sqrt[6]{(2014-x)\sqrt{2014-x}}=(2014-x)^{\frac{1}{4}}$ (1) Dar $\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{\frac{1}{14}} \cdot x^{\frac{1}{28}}=x^{\frac{1}{4}}$ (2)	**1 p**

	Folosind relaţiile (1) şi (2) ecuaţia devine $x^{\frac{1}{4}}-(2014-x)^{\frac{1}{4}}=\log_{2015}(2014-x)-\log_{2015}x \Leftrightarrow$ $\sqrt[4]{x}+\log_{2015}x=\sqrt[4]{2014-x}+\log_{2015}(2014-x) \qquad (3)$ Funcţia $f:(0,2014)\to R,\ f(t)=\sqrt[4]{t}+\log_{2015}t$ este strict crescătoare şi deci este injectivă	**1 p**
	Ecuaţia (3) se scrie echivalent $f(x)=f(2014-x)$	**1 p**
	şi cum f este injectivă rezultă că $x=2014-x \Leftrightarrow x=1007\in D.$ Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{1007\}$.	**1 p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4. a)	Fie $z=a+bi,\ a,b\in R.$ Atunci $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=\lvert z\rvert^2$.	**2 p**
4. b)	Cum $\lvert z\rvert^2=z\cdot\overline{z},\forall z\in C,$ inegalitatea se scrie $9\lvert z_1+z_2\rvert^2\ge\lvert 5z_1+z_2\rvert^2 \Leftrightarrow 9(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\ge(5z_1+z_2)(5\overline{z_1}+\overline{z_2})\Leftrightarrow$ $9(\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2})\ge 25\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+5(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2})\Leftrightarrow$ $0\ge 16\lvert z_1\rvert^2-8\lvert z_2\rvert^2-4\overline{z_1}z_2-4z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow 0\ge 4\lvert z_1\rvert^2-2\lvert z_2\rvert^2-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2} \qquad (*)$	**2 p**
	Deoarece din ipoteză avem $\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert$, inegalitatea $(*)$ se scrie echivalent $0\ge 2\lvert z_1\rvert^2-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow 0\ge\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}\Leftrightarrow(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\le 0\Leftrightarrow$ $\lvert z_1-z_2\rvert^2\le 0$	**2 p**
	Din ultima relaţie rezultă că $\lvert z_1-z_2\rvert=0\Leftrightarrow z_1-z_2=0\Leftrightarrow z_1=z_2$.	**1 p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof. Tămîian Traian – Liceul Teoretic Carei