INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN VRANCEA

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI
CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI –a

1) Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

a) Demonstraţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Considerând cunoscut faptul că $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2$, calculaţi $\lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right)$.

***

2) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$ pentru $a_n = \left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}$, $n \geq 1$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

S, GM 12/2014

3) Fie $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 2,$ astfel încât $A^3 = I_n$ şi matricea $I_n - A$ este inversabilă.

a) Demonstraţi că matricea $I_n + A$ este inversabilă şi determinaţi inversa ei în funcţie de A.

b) Calculaţi $\det(I_n + A)$.

***

4) Fie A o matrice pătratică cu elemente întregi având determinantul egal cu 2. Să se demonstreze că cel puţin un complement algebric al matricei A este număr întreg impar.

GM 9/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.