**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ**

**SUCEAVA**

**22 februarie 2014**

**CLASA a VIII – a**

**1.** Determinați numerele reale *a, b, c* din egalitatea:

$$\sqrt{a-2012}+\sqrt{b+2013}+\sqrt{c-2014}=\frac{a+b+c-1965}{8}.$$

**2.** a) **(2p)** Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{2}{a+b}$, pentru orice numere reale strict pozitive $a,b$.

b) **(5p)** Arătați că: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}\geq 2$ , oricare ar fi numerele reale strict pozitive $x, y, z, t$.

**3.** Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu latura de $4a$ cm și înălțimea $AA'=3a$ cm. Se notează cu $D$ și $E$ mijloacele muchiilor $[A'C']$, respectiv $[A'B']$. Să se determine măsura unghiului format de dreapta $AA'$ cu planul $(BCDE)$.

**4.** Pătratele ABCD și ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculați măsura unghiului diedru format de planele $(MAD)$ și $(MND)$ .

**Notă:** **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
**3. Timp de lucru 3 ore.**

## BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
## CLASA a VIII–a

**1.** Determinați numerele reale *a, b, c* din egalitatea:

$$\sqrt{a-2012}+\sqrt{b+2013}+\sqrt{c-2014}=\frac{a+b+c-1965}{8}.$$

*Prof. Gabriela Sascău, Rădăuți*

***Soluție:*** Notăm: $x=\sqrt{a-2012}$, $y=\sqrt{b+2013}$, $z=\sqrt{c-2014}$, de unde obținem: $a=x^2+2012$, $b=y^2-2013$, $c=z^2+2014$. Egalitatea devine: $x+y+z=\frac{x^2+y^2+z^2+2013-1965}{8}$, de unde $x^2+y^2+z^2+48=8x+8y+8z$. Avem: $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=0$, deci $x=y=z=4$, iar $a=2028, b=-1997, c=2030$.

***Barem:***

| | |
|---|---|
| Notăm: $x=\sqrt{a-2012}$, $y=\sqrt{b+2013}$, $z=\sqrt{c-2014}$, de unde obținem: $a=x^2+2012$, $b=y^2-2013$, $c=z^2+2014$. | 2p |
| Egalitatea devine: $x+y+z=\frac{x^2+y^2+z^2+2013-1965}{8}$, de unde $x^2+y^2+z^2+48=8x+8y+8z$ | 2p |
| $(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=0$ | 1p |
| $x=y=z=4$ | 1p |
| $a=2028, b=-1997, c=2030$ | 1p |

**1.** a) **(2p)** Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ge\frac{2}{a+b}$, pentru orice numere reale strict pozitive *a, b*.

b) **(5p)** Arătați că: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}\ge 2$, oricare ar fi numerele reale strict pozitive *x, y, z, t*.

*Gazeta Matematica Nr.5/2010*

***Soluție:*** **a)** Inegalitatea este echivalentă cu $a+b\ge 2\sqrt{a\cdot b}$, ceea ce este adevărat, deoarece este echivalentă cu: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$.

**b)** Folosind inegalitatea de la punctul a) pentru $a=\frac{y+z+t}{x}$ și $b=1$, avem: $\frac{1}{\sqrt{\frac{y+z+t}{x}\cdot 1}}\ge\frac{2}{\frac{y+z+t}{x}+1}$, echivalentă cu: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}\ge\frac{2x}{x+y+z+t}$. Analog, $\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}\ge\frac{2y}{x+y+z+t}$, $\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}\ge\frac{2z}{x+y+z+t}$, $\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}\ge\frac{2t}{x+y+z+t}$. Prin adunarea ultimelor patru inegalități obținem: $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}\ge\frac{2(x+y+z+t)}{x+y+z+t}$, de unde inegalitatea cerută.

***Barem:***

| | |
|---|---|
| a) Inegalitatea este echivalentă cu $a+b\ge 2\sqrt{a\cdot b}$, ceea ce este adevărat, deoarece este echivalentă cu: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$. | 2p |

| | |
|---|---|
| b) Folosind inegalitatea de la punctul a) pentru $a = \frac{y+z+t}{x}$ și $b = 1$, avem: $\frac{1}{\sqrt{\frac{y+z+t}{x} \cdot 1}} \geq \frac{2}{\frac{y+z+t}{x}+1}$ | 2p |
| $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t}$, $\sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}$, $\sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t}$, $\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}$ | 1p |
| : $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2(x+y+z+t)}{x+y+z+t}$ | 1p |
| $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq 2$ | 1p |

**3.** Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral cu latura de 4*a* cm și înălțimea $AA'$ =3*a* cm. Se notează cu *D* și *E* mijloacele muchiilor $[A'C']$, respectiv $[A'B']$. Să se determine măsura unghiului format de dreapta $AA'$ cu planul $(BCDE)$.

*Prof. Stela Boghian, Suceava*

***Soluție:*** Fie $BE \cap AA' = \{F\}$.
$\Delta BB'E \equiv \Delta FA'E(C.U.)$ de unde rezultă: $[A'F] \equiv [BB'] (\equiv [AA'] \equiv [CC'])$
$\Delta FA'D \equiv \Delta CC'D(C.C.)$ de unde rezultă $\sphericalangle FDA' \equiv \sphericalangle C'DC$, de unde $CD \cap AA' = \{F\}$.
Planul $(BCDE)$ coincide cu planul $(BCF)$. Fie M mijlocul lui $[BC]$.
Cum $FA \perp (ABC)$, $AM \perp BC$, $AM, BC \subset (ABC)$, conform th. celor 3 perpendiculare, avem: $FM \perp BC$.
Cum $FM \perp BC$, $AM \perp BC$, avem: $BC \perp (AFM)$.
Fie $AN \perp FM$, cum $AN \subset (AFM)$ și $BC \perp (AFM)$., avem: $BC \perp AN$.
Din $AN \perp FM$ și $BC \perp AN$ rezultă $AN \perp (BCF)$, deci $pr_{(BCF)} AA' = FM$, iar măsura unghiului cerut este $m(\sphericalangle AFM)$. În $\Delta AFM$, dreptunghic în A, avem: $tg(\sphericalangle AFM) = \frac{AM}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $m(\sphericalangle AFM) = 30^\circ$.

***Barem:***

| | |
|---|---|
| Fie $BE \cap AA' = \{F\}$.<br>$\Delta BB'E \equiv \Delta FA'E(C.U.)$ de unde rezultă: $[A'F] \equiv [BB'] (\equiv [AA'] \equiv [CC'])$<br>$\Delta FA'D \equiv \Delta CC'D(C.C.)$ de unde rezultă $\sphericalangle FDA' \equiv \sphericalangle C'DC$, de unde $CD \cap AA' = \{F\}$. | 1p |
| Planul $(BCDE)$ coincide cu planul $(BCF)$. Fie M mijlocul lui $[BC]$.<br>Cum $FA \perp (ABC)$, $AM \perp BC$, $AM, BC \subset (ABC)$, conform th. celor 3 perpendiculare, avem: $FM \perp BC$. | 1p |
| Cum $FM \perp BC$, $AM \perp BC$, avem: $BC \perp (AFM)$. | 1p |
| Fie $AN \perp FM$, cum $AN \subset (AFM)$ și $BC \perp (AFM)$., avem: $BC \perp AN$. | 1p |
| Din $AN \perp FM$ și $BC \perp AN$ rezultă $AN \perp (BCF)$, deci $pr_{(BCF)} AA' = FM$, iar măsura unghiului cerut este $m(\sphericalangle AFM)$. | 1p |
| Calculează $AF = 6a, AM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$. | 1p |
| În $\Delta AFM$, dreptunghic în A, avem: $tg(\sphericalangle AFM) = \frac{AM}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci $m(\sphericalangle AFM) = 30^\circ$. | 1p |

**4.** Pătratele ABCD şi ABMN sunt situate în plane perpendiculare. Calculaţi măsura unghiului diedru format de planele $(MAD)$ şi $(MND)$ .

*Prof. Şlincu Gabriela, Suceava*

***Soluţie:*** Cum $AB \perp AD$ şi $AB \perp AN$ avem $AB \perp (NAD)$, dar $AB \parallel MN$ , deci $MN \perp (NAD)$.
Fie E mijlocul lui $[ND]$. Cum $AE \subset (NAD)$ rezultă $MN \perp AE$, dar şi $ND \perp AE$ (mediană în triunghi isoscel), deci $AE \perp (MND)$. Fie $EF \perp MD$ , cum $EF, MD \subset (MND)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, avem: $AF \perp MD$ . Muchia unghiului diedru este $MD$ , deci măsura unghiului diedru este $m(\sphericalangle EFA)$. În $\Delta AEF$ dreptunghic în E: $\sin(\sphericalangle EFA) = \frac{AE}{AF}$. În $\Delta AND$ dreptnghic în A: $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , unde a este latura pătratului. Cum $AD \perp (NAB)$, iar $AM \subset (NAB)$, triunghiul $\Delta MAD$ este dreptunghic în A şi $AF = \frac{MA \cdot AD}{MD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Deci, $\sin(\sphericalangle EFA) = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , rezultă $m(\sphericalangle EFA) = 60^\circ$ .

***Barem:***

| | |
|---|---|
| Cum $AB \perp AD$ şi $AB \perp AN$ avem $AB \perp (NAD)$, dar $AB \parallel MN$ , deci $MN \perp (NAD)$. Fie E mijlocul lui $[ND]$. Cum $AE \subset (NAD)$ rezultă $MN \perp AE$, dar şi $ND \perp AE$ (mediană în triunghi isoscel), deci $AE \perp (MND)$ | 2p |
| Fie $EF \perp MD$ , cum $EF, MD \subset (MND)$, conform teoremei celor trei perpendiculare, avem: $AF \perp MD$ . | 1p |
| Muchia unghiului diedru este $MD$ , iar $EF \perp MD$ , $AF \perp MD$ , deci măsura unghiului diedru este $m(\sphericalangle EFA)$.<br>În $\Delta AEF$ dreptunghic în E: $\sin(\sphericalangle EFA) = \frac{AE}{AF}$. | 1p |
| În $\Delta AND$ dreptnghic în A: $AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , unde a este latura pătratului.<br>Cum $AD \perp (NAB)$, iar $AM \subset (NAB)$, triunghiul $\Delta MAD$ este dreptunghic în A şi $AF = \frac{MA \cdot AD}{MD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . | 2p |
| $\sin(\sphericalangle EFA) = \frac{AE}{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , rezultă $m(\sphericalangle EFA) = 60^\circ$ . | 1p |