Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a VIII-a

Problema 1

Fie numerele reale $a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ şi $b = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a) Arătaţi că numărul $a \cdot b - \sqrt{24}$ este număr întreg

b) Raţionalizaţi numitorul fracţiei $\frac{a+b}{a-b}$

c) Arătaţi că numărul $(a^2 + b^2)^{-1}$ se află în intervalul $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Problema 2

Fie expresia $E(x) = x^9 + 2x^8 + 2x^7 + \cdots + 2x + 1$.

a) Calculaţi $E(-1)$

b) Arătaţi că $(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) = x^9 + x^7 + x^6 + \cdots + x + 1$

c) Descomuneţi în factori expresia $E(x)$

Problema 3

Fie prisma triunghiulară regulată dreaptă ABC A'B'C' cu $AB = 2a$ şi $AA' = a$

a) Arătaţi că perimetrul triunghiului ACB' este mai mare dacât perimetrul patrulaterului BCC'B'

b) Demonstraţi că suprafeţele ACB' şi BCC'B' sunt echivalente

c) Dacă B'E este bisectoarea unghiului A'B'B , $E \in AB$ şi M este mijlocul lui $[BC]$, demonstraţi că $A'C' \parallel (B'ME)$

Problema 4

Fie ABCD un pătrat care se îndoaie după diagonala AC.

a) Dacă$(DAC) \perp (ABC)$, demonstraţi că triunghiul DAB este echilateral.

b) Dacă $m\big(\measuredangle(DAC);(ABC)\big) = 60^o$ şi AB = 12 cm, calculaţi lungimea lui $[BD]$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Barem de notare
Clasa a VIII-a

Problema 1 .

a) $a \cdot b - \sqrt{24} = (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) - 2\sqrt{6}$ ……………………………1p
$= -4 \in \mathbb{Z}$ ……………………………1p

b) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2}{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$ ……………………………1p

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ……………………………1p

c) $a^2 = (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = 6 + 2\sqrt{2}$-$2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$
$b^2 = (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 6$ - $2\sqrt{2}$-$2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ ……………………………1p
$a^2 + b^2 = 12 - 4\sqrt{6}$; $(a^2+b^2)^{-1} = \frac{1}{12-4\sqrt{6}} = \frac{1}{4(3-\sqrt{6})} = \frac{3+\sqrt{6}}{12}$ ……………………1p
$Din \quad 2 < \sqrt{6} < 3 \Rightarrow 3+\sqrt{6} < 6 \;\Rightarrow\; \frac{3+\sqrt{6}}{12} < \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
Rezulta ca $(a^2+b^2)^{-1} \in (0; \frac{1}{2})$ ……………………1p

Problema 2.

a) $E(-1) = 0$ ……………………………2p
b) $Verificare\ relatie$ ……………………………1p
c) $E(x) = x^9 + x^8 + x^8 + x^7 + \cdots + x + x + 1$ ……………………………1p
$E(x) = (x^9+x^8) + (x^8+x^7) + \cdots + x + (x+1)$ ……………………………1p
$E(x) = (x+1)(x^8+x^7+\cdots+x+1)$ ……………………………1p
$Din\ b)\ Rezulta\ ca\ \ E(x) = (x+1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ ……………………1p

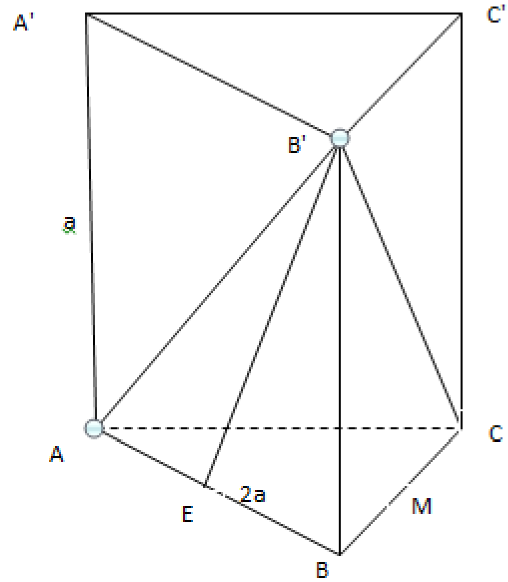
Problema 3 .
Solutie

a) $\triangle B'BA \equiv \triangle B'BC\ \ (C.C.) \implies [B'A] \equiv [B'C] \implies \triangle B'AC\ isoscel$

În $\triangle B'BA$: m$(\hat{B}) = 90^0 \overset{T.P.}{\implies} B'A = a\sqrt{5}$
$\implies P_{\Delta ACB'} = AC + CB' + B'A = 2a + 2a\sqrt{5} = 2(1+\sqrt{5})a$ (1) ………………1p

$P_{BCC'B'} = 2(BC + CC') = 2(2a + a) = 6a$ (2)

Avem $2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 1 + \sqrt{5} > 3 \Rightarrow 2(1 + \sqrt{5}) > 6 \xRightarrow{1)\ si\ 2)} P_{\Delta ACB'} > P_{BCC'B'}$ 1p



b) Fie $B'F \perp AC \Rightarrow B'F = 2a$ ($T.P.$ in triunghiul AFB')

$A_{\Delta ACB'} = \frac{AC \cdot B'F}{2} = \frac{2a \cdot 2a}{2} = 2a^2$ (3)

$A_{BCC'B'} = BC \cdot CC' = 2a \cdot a = 2a^2$ (4)

Din (3) si (4) rezulta ca $A_{\Delta ACB'} = A_{BCC'B'}$ 2p

c) (B'E $-$ bisectoarea unghiului A'B'B $\Longrightarrow m\sphericalangle(A'B'E) = m\sphericalangle(EB'B) = 45^0$

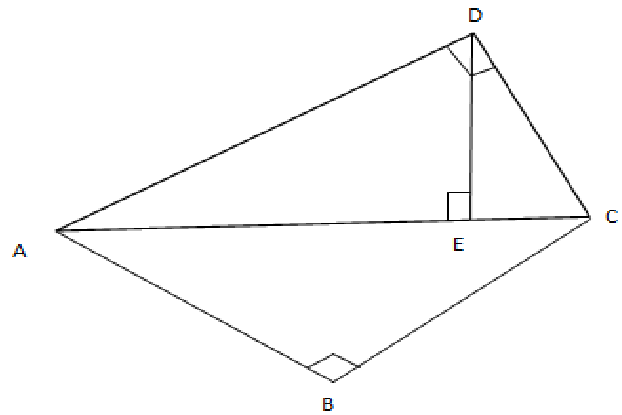
$\Rightarrow triunghiul\ EBB'\ este\ dreptunbhic\ isoscel\ \Rightarrow EB = BB' = a$ 1p

$AB = 2a \Rightarrow AE = AB - BE = a \Rightarrow AE = EB$ (E $mijlocul\ lui\ AB$)

$M\ mijlocul\ lui\ [BC] \Rightarrow (EM) linie\ mijlocie\ in\ tr.ABC$

Finalizare $A'C' || (B'ME)$ 1p

Problema 4



a) $(DAC) \perp (ABC)$, $(DAC) \cap (ABC) = [AC]$

Fie $DE \perp AC \Rightarrow DE \perp (ABC)$.

$\Delta ADC\ dr.is.\ ,DE\ inaltime \Rightarrow DE\ mediana \Rightarrow$

$E\ mijlocul\ lui\ [AC] \Rightarrow ED = \frac{AC}{2}$ (1) …………..1p

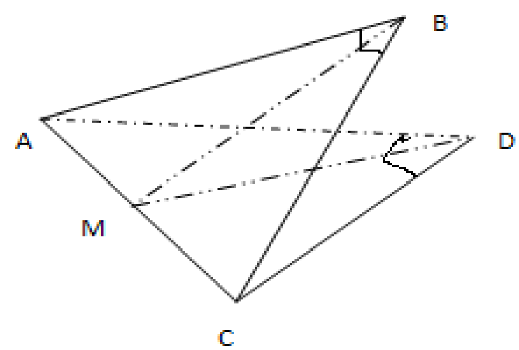
$Analog\ BE\ mediana\ coresp.\ ipotenuzei\ AC \Rightarrow BE = \frac{AC}{2}$ (2) …………..1p

$Din\ (1)\ si\ (2)\ [DE] = [BE] \Rightarrow \Delta DEB\ tr.dr.is.$ …………..1p

$Notam\ latura\ patratului\ initial\ cu\ a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

$DE = EB = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DB = a \Rightarrow \Delta ABD\ echilateral$ …………..1p

b)



Fie $BM \perp AC$

$\Delta ABC\ dr.\ is. \Rightarrow BM\ mediana \Rightarrow BM = \frac{AC}{2}$

………………………………………… 1p

Analog $DM = \frac{AC}{2}$, ΔBMD isoscel ,

$m(\sphericalangle(ABC),(ACD)) = 60^0$ rezulta ΔBMD echilateral …………………………………………..1p

Finalizare $BD = BM = MD = \frac{AC}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm$ …………………………………………..1p