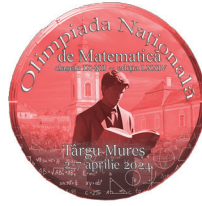




MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a XII-a – subiecte

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că $f(x) + \sin(f(x)) \geq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că

$$\int_0^\pi f(x) dx \geq \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Problema 2. Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corp cu proprietatea că $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$. Arătați că corpul $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ este comutativ.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu $f(1) = 0$. Demonstrați existența și determinați valoarea limitei

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x (f(tx) - f(x)) dx \right).$$

Problema 4. Fie \mathbb{L} un corp finit, cu q elemente. Arătați că:

- Dacă $q \equiv 3 \pmod{4}$ și $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, este un număr natural divizibil prin $q - 1$, atunci $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice element $x \in \mathbb{L}^*$.
- Dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq 2$, astfel încât $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$, atunci $q \equiv 3 \pmod{4}$ și $q - 1$ divide n .