MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Târgu Mureş, 3 aprilie 2024

CLASA a XII-a – subiecte

Problema 1. *Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietatea că $f(x) + \sin(f(x)) \geq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că*

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \geq \frac{\pi^2}{2} - 2\,.$$

Problema 2. *Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corp cu proprietatea că $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$. Arătaţi că corpul $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ este comutativ.*

Problema 3. *Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu $f(1) = 0$. Demonstraţi existenţa şi determinaţi valoarea limitei*

$$\lim_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x\,(f(tx) - f(x))\,dx \right).$$

Problema 4. *Fie $\mathbb{L}$ un corp finit, cu q elemente. Arătaţi că:*
a) Dacă $q \equiv 3 \pmod 4$ şi $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, este un număr natural divizibil prin $q - 1$, atunci $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice element $x \in \mathbb{L}^*$.
b) Dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq 2$, astfel încât $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$, atunci $q \equiv 3 \pmod 4$ şi $q - 1$ divide n.