OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Numerele naturale a și b, cu b număr prim, verifică ecuația:

$$3(a+139)+b=3a^2-2016 .$$

a) Determinați numerele a și b ;

b) Scrieți numărul a^{29b} ca sumă de trei pătrate perfecte distincte, nenule;

c) Scrieți numărul a^b ca sumă de 29 numere naturale consecutive .

SUBIECTUL 2

Să se arate că numărul $A=2016^n+2015^n+64^n$ este divizibil cu 91, $\forall n\in$ N, n impar.

SUBIECTUL 3

Fie punctele coliniare A,B,C,D în această ordine, astfel încât $5AB=9AC-4AD$ și $BD=18$ *cm*.

a) Să se afle lungimile segmentelor *BC și DC*.

b) Dacă P este mijlocul segmentului *AD* și $P\in(BC)$, precizați valoarea maximă posibilă, număr natural, a lungimii segmentului AD.

SUBIECTUL 4

Se dau triunghiurile ΔABC *și* $\Delta A'B'C'$, M și M' mijloacele laturilor *(BC)*, respectiv $(B'C')$,

$[AB]\equiv[A'B']$, $[AC]\equiv[A'C']$ și $[AM]\equiv[A'M']$. Arătați că $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 21.02.2016
Clasa a VI-a
Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) $3(a+139) \vdots 3$, $3a^2 \vdots 3$, $2016 \vdots 3 \Rightarrow 3/b$, b - prim$\Rightarrow b=3$ **1p**

Inlocuire, $a^2 - a = 812$ **1p**

$a(a-1) = 812 = 29 \cdot 28 \Rightarrow a = 29$ **1p**

b) $a^{29b} = 29^{87} = 29^{86} \cdot 29 = (29^{43})^2 \cdot (2^2+3^2+4^2)$ **1p**

$a = (29^{43} \cdot 2)^2 + (29^{43} \cdot 3)^2 + (29^{43} \cdot 4)^2$ **1p**

c) $a^b = 29^3 = (x+1)+(x+2)+\ldots+(x+29) = 29x + 29 \cdot 15$ **1p**

$x+15 = 29^2 \Rightarrow x = 826 \Rightarrow a^b = 827+828+\ldots+855$ **1p**

SUBIECTUL 2

$91 = 7 \cdot 13$ și $(7\,;\,13) = 1$ **1p**

$2016 = 7 \cdot 288 = 13 \cdot 155 + 1$, $2015 = 7 \cdot 288 - 1 = 13 \cdot 155$ și $64 = 7 \cdot 9 + 1 = 13 \cdot 5 - 1$ **2p**

Atunci $A = (7 \cdot 288)^n + (7 \cdot 288 - 1)^n + (7 \cdot 9 + 1)^n = M_7 + M_7 - 1^n + M_7 + 1^n = M_7$ **2p**

$A = (13 \cdot 155 + 1)^n + (13 \cdot 155)^n + (13 \cdot 5 - 1)^n = M_{13} + 1 + M_{13} + M_{13} - 1 = M_{13}$ **1p**

$7 / A$, $13 / A$, $(7\,;\,13) = 1 \Rightarrow 91 / A$ **1p**

SUBIECTUL 3

a) Dacă AB = x, BC= y, CD = z avem :

$5x = 9(x+y) - 4(x+y+z)$ **1p**

$5x = 9(x+y) - 4(x+18) \Rightarrow y = 8$ și $z = 10 \Rightarrow BC = 8cm$ și $CD = 10cm$ **2p**

b) P$\in (BC)$ și B$\in (AC) \Rightarrow AP > AB$ **1p**

$\frac{x+y+z}{2} > x \Rightarrow x < y+z$

x < 18$\Rightarrow x+y+z < 18+y+z \Rightarrow AD < 36$ **2p**

AD număr natural , AD maxim $\Rightarrow AD = 35cm$ **1p**

SUBIECTUL 4

Construim A_1 -simetricul lui A față de M și A_1' -simetricul lui A' față de M' **1p**

$\Delta AMB \equiv \Delta A_1MC(LUL) \Rightarrow [AB] \equiv [A_1C]$ **1p**

și $\Delta A'B'M' \equiv \Delta A_1'C'M' \Rightarrow [A'B'] \equiv [A_1'C']$ **1p**

dar $[AB] \equiv [A'B']$, deci $[A_1C] \equiv [A_1'C']$ **1p**

$\Delta ACA_1 \equiv \Delta A'C'A_1'(LLL) \Rightarrow \measuredangle MAC \equiv \measuredangle M'A'C'$ **1p**

$\Rightarrow \Delta MAC \equiv \Delta M'A'C' \Rightarrow [MC] \equiv [M'C']$ **1p**

$\Rightarrow [BC] \equiv [B'C'] \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'(LLL)$ **1p**