MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
SUBIECTE clasa a IX-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

1.	Fie $x \in R \setminus \{1\}$. Demonstraţi că pentru orice $n \in N \setminus \{0\}$ are loc egalitatea $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$
2.	Se consideră numerele $a, b > 0$ cu proprietatea că $ab = 1$. Demonstraţi inegalitatea $\dfrac{a^2}{a^3+b} + \dfrac{b^2}{b^3+a} \geq \dfrac{2}{a^2+b^2}$.
3.	Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = 2$ respectiv $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{2}{3}$. (a) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{CM}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{CB}$; (b) Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{AR}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, unde $BN \cap CM = \{R\}$; (c) Arătaţi că punctele A, P, R sunt coliniare, unde $P \in (BC)$ cu proprietatea că $3\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CP}$
4.	Se consideră mulţimea $M = \left\{ \dfrac{x-[x]}{x} \,\middle|\, x \geq 1 \right\}$, unde prin $[x]$ se înţelege partea întreagă a numărului x. Arătaţi că $M = \left[0; \dfrac{1}{2}\right)$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes !

Prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar pentru matematică – I.Ş.J. Timiş
Lector.dr. Mihai Chiş-preşedinte S.S.M.R. – Filiala Timiş

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a-IX-a MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1: (7 puncte)
Se demonstrează prin inducţie matematică.
Etapa de verificare……………………..**1p**
Demonstrarea implicaţiei $p(k) \to p(k+1)$..**5p**
Finalizare..**1p**

Subiectul 2: (7 puncte)

Scrie membrul stâng al inegalităţii în forma $\frac{a^2 b}{a^3 b + b^2} + \frac{b^2 a}{b^3 a + a^2}$ …..**2p**

Foloseşte condiţia din ipoteză $ab = 1$ **1p**

Obţine $\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + a^2}$ **1p**

Foloseşte inegalitatea mediilor ……………..**2p**
Finalizare..**1p**

Subiectul 3: (7 puncte)

(a) Obţine $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ …...**2p**

(b) Obţine $\overrightarrow{AR} = \frac{6}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$ **2p**

(c) Demonstrează coliniaritatea **3p**

Subiectul 4: (7 puncte)
Se demonstrează prin dublă incluziune
Consideră $y \in M$ şi demonstrează că $y \ge 0$ ……..…...**1p**

Arată că $\frac{[x]}{x} > \frac{1}{2}$ **1p**

Demonstrează că $y = \frac{x - [x]}{x} < \frac{1}{2}$ **1p**

Consideră $z \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$ şi demonstrează că $\left[\frac{1}{1-z}\right] = 1$ ……...**1p**

Scrie numărul z în forma $z = \dfrac{\frac{1}{1-z} - \left[\frac{1}{1-z}\right]}{\frac{1}{1-z}}$ **1p**

Notează $x = \frac{1}{1-z}$ şi arată că $z \in M$ **1p**

Finalizare…...…... ……………..**1p**