Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a

1. Determinaţi toate soluţiile reale ale următoarelor ecuaţii:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}=2$;

b) $\dfrac{x^2+1}{x}=2^{x(2-x)}$.

2. Fie $a,b,c\in(0,1)$ şi $x,y,z\in(0,\infty)$ astfel încât $a=(bc)^x$, $b=(ca)^y$ şi $c=(ab)^z$. Demonstraţi că:

a) $x,y,x>0$;

b) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=2$;

c) $\dfrac{1}{x+y+2}+\dfrac{1}{y+z+2}+\dfrac{1}{z+x+2}\le 1$.

3. Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ distincte, astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Demonstraţi că $a^3=b^3=c^3$.

Gazeta Matematică – nr.9/2012

4. Fie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte condiţiile:

i) $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$;

ii) $f(0)\ne 0$ şi $f(1)=\dfrac{5}{2}$.

a) Demonstraţi că funcţia f este pară;

b) Determinaţi funcţia f .

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a - barem

1. **a)** Se observă că $x=0$ este soluţie şi pe baza monotoniei funcţiei radical se demonstrează că este unică. **3p**

b) Ipoteza conduce la concluzia $x>0$. **1p**

Avem $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$ şi $2^{x(2-x)}\leq 2$ pentru orice $x>0$, de unde $x=1$. **3p**

2. **a)** Se obţine prin logaritmare **1p**

b) $\sum\frac{1}{x+1}=\sum\frac{1}{\log_{bc}a+1}=\sum\frac{\lg b+\lg c}{\lg a+\lg b+\lg c}=2$. **2p**

c) Avem $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\geq\frac{4}{x+y+2}$ şi atunci $\sum\frac{1}{x+y+2}\leq\frac{1}{4}\sum\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=1$. **4p**

3. Fie $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $z=(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Deoarece $a+b$, $a+c$ şi $b+c$ sunt distincte, ele sunt rădăcinile de ordin trei ale numărului z. Dacă $w\in\mathbb{C}$ este una dintre ele atunci avem de exemplu $a+b=w$, şi $a=-w\varepsilon^2$ şi $b+c=w\varepsilon^2$, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **4p**

Obţinem $a+b+c=0$ .Apoi $c=-w$, $b=-w\varepsilon$ şi $a=-w\varepsilon^2$, de unde concluzia . **3p**

4. **a)** Schimbăm pe x cu y şi deducem $f(x+y)+f(x-y)=f(y+x)+f(y-x)$ şi apoi alegem $y=0$. **2p**

b) Din $x=y=0$ obţinem $f(0)=2$. Pentru $y=1$, avem $f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1)$, iar prin inducţie obţinem $f(n)=2^n+2^{-n}$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$. Folosind paritatea obţinem $f(x)=2^x+2^{-x}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}$. **4p**

Această funcţie verifică ipotezele problemei. **1p**

NOTĂ

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro