TESTUL 1

Problema 1. Fixăm un număr întreg $n \geq 2$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

când x_1, x_2, ..., x_n parcurg mulţimea numerelor reale strict pozitive, supuse condiţiei

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Determinaţi şi valorile x_1, x_2, ..., x_n care realizează acest minimum.

Problema 2. Fixăm un număr întreg $n \geq 3$. Pentru fiecare submulţime nevidă a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, considerăm media aritmetică a elementelor sale. Fie S mulţimea valorilor distincte ale acestor medii aritmetice. Determinaţi cea mai mica valoare absolută $|a - b|$, când a şi b parcurg mulţimea S şi $a \neq b$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, $AB < AC$, şi fie Γ cercul său circumscris. Tangenta lui Γ în A intersectează dreapta BC în K. Cercul Ω, de rază KA şi centru K, intersectează a doua oară Γ în L. Cercul Ω intersectează a doua oară dreapta BL în M şi dreapta CM în N. Arătaţi că dreapta AN trece prin mijlocul segmentului BC.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Este posibil ca orice număr raţional strict pozitiv să fie exprimat sub forma

$$\frac{a^n + b^{n+2}}{c^{n+1} + d^{n+3}},$$

unde a, b, c, d sunt numere naturale nenule?

Problema 5. Fixăm un număr întreg $k \geq 2$. Determinaţi cel mai mic număr întreg n, astfel încât, printre oricare n puncte în plan, să existe k puncte între care fie toate distanţele sunt mai mici sau egale cu 2, fie toate distanţele sunt strict mai mari decât 1.