Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Barem - Clasa a V-a

1. Aflaţi ultima cifră a numărului natural *n* ştiind că penultima cifră a lui n^2 este 9.

Ultima cifră a lui n^2 nu poate fi 2,3,7,8, astfel încât ultimele două cifre ale lui n^2 ar putea fi 90,91,94,95,96 sau 99	**1p**
n^2 nu poate avea ultimele 2 cifre 95 pentru că un pătrat perfect impar, divizibil cu 5, trebuie să se termine în 25 (sau $5\|n$ și $25 \nmid n \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect)	**1p**
Cum $90=M_4+2$, $94=M_4+2 \Rightarrow n^2=M_4+2$, dar un pătrat perfect nu poate fi M_4+2	**1p**
Cum $91=M_4+3$ și $99=M_4+3 \Rightarrow n^2=M_4+3$, dar un pătrat perfect nu poate fi M_4+3	**1p**
În concluzie rămâne singura variantă ca n^2 să aibă ultimele 2 cifre 96 ⇒ultima cifră a lui *n* poate fi 4 sau 6	**1p**
Ambele variante sunt corecte, de exemplu $14^2=196$ și $36^2=1296$	**2p**

Obs. 1: Pentru justificarea „$95=M_4+3 \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect" se acordă **1p.**

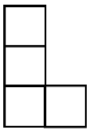
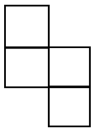
La fel pentru $2|n$ și $4 \nmid n \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect, în situațiile în care ultimele două cifre ale lui n^2 sunt 90, respectiv 94 se acordă tot **1p**

Obs. 2

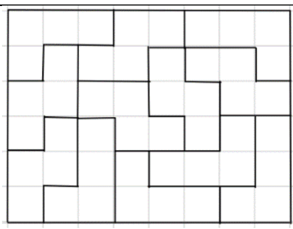
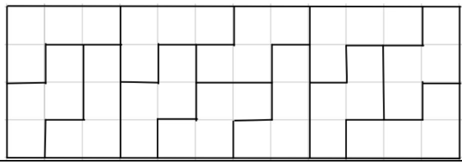
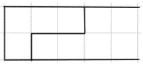
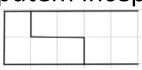
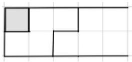
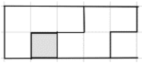
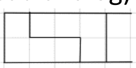
Dacă elevii obțin ultimele două cifre posibile ale lui n^2 prin analiza ultimei cifre a lui *n* se acordă **1p.**

2. Dacă numărul natural *a* are *n* cifre, iar numărul natural a^4 are *m* cifre, arătați că suma *m+n* nu poate fi egală cu 2021.

a are *n* cifre $\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq a < 10^n$	**1p**
Atunci $10^{4n-4} \leq a^4 < 10^{4n} \Rightarrow$	**1p**
numărul a^4 poate avea *4n-3, 4n-2, 4n-1* sau *4n* cifre	**1p**
Deci *m+n* este egal cu *5n-3, 5n-2, 5n-1* sau *5n,*	**1p**
adică este de forma M_5+2, M_5+3, M_5+4 sau M_5	**1p**
Cum $2021=M_5+1 \Rightarrow$suma *m+n* nu poate fi egală cu 2021	**2p**

3. Se poate pava o tablă dreptunghiulară de 48 de pătrățele (*m*×*n*, unde *m* și *n* sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2), utilizând piese de 4 pătrățele, de forma  **(tip 1), respectiv**  **(tip 2), astfel încât să folosim un număr egal de piese din fiecare tip?**

Prin pavare înțelegem acoperirea completă, cu piese, a tuturor pătrățelelor tablei, astfel încât să nu existe piese care se suprapun sau care ies parțial în afara tablei.

48:4=12 (piese de ambele tipuri), deci trebuie folosite 6 piese de tipul 1 și 6 piese de tipul 2. O tablă dreptunghiulară cu 48 de pătrățele poate avea următoarele dimensiuni: 8x6, 12x4, 16x3 sau 24x2, deci avem de analizat următoarele 4 cazuri:	
I. Pentru tabla de forma 8x6 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect. 	**2p**
II. Pentru tabla de forma 12x4 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect. 	**2p**
III. Pentru tabla de forma 16x3, vom demonstra că NU se poate. Colorăm tabla în felul următor: prima linie cu negru, a doua cu alb și cea de-a treia tot cu negru. Vom avea astfel 32 de pătrățele negre și 16 albe. O piesă de tipul 1 poate acoperi fie 3 pătrățele albe și una neagră, fie 3 pătrățele negre și una albă, iar o piesă de tipul 2, indiferent cum este așezată, va acoperi 2 pătrățele albe și 2 pătrățele negre. Cele 6 piese de tipul 1 pot acoperi cel mult 18 pătrățele negre, iar cele 6 piese de tipul 2 acoperă 12 pătrățele negre, deci, în total, putem acoperi cel mult 30 de pătrățele negre. Cum noi avem de acoperit 32 de pătrățele negre, rezultă că tabla nu se poate pava.	**2p**
IV. Pentru tabla de forma 24x2, putem începe fie cu o piesă de tipul 1, după cum urmează  sau , fie cu o piesă de tipul 2, situație în care va rămâne o pătrățică neacoperită:  (sau analog). Dacă am început cu piesa de tipul 1 și continuăm cu o piesă de tipul 2, iarăși rămâne o pătrățică neacoperită:  (sau analog). Dacă vom continua tot cu o piesă de tipul 1,  revenim în situația de la început. În concluzie, nu putem pune pe tablă piese de tipul 2 fără să rămână pătrățele neacoperite, prin urmare tabla nu se poate pava.	**1p**

4. **Aflați numerele naturale *x<y<z* având suma 2021, știind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:**

a) **Fiecare număr are cifrele distincte;**

b) **Există 3 cifre distincte *a,b,c* astfel încât fiecare cifră a numerelor *x,y* și *z* este *a,b* sau *c.***

Deoarece 99+99+999<2017 ⇒ trebuie să avem cel puțin 2 numere de 3 cifre	**1p**
Dacă toate cele 3 numere vor fi de 3 cifre ⇒aceste cifre vor fi *a,b,c*, deci numerele vor avea aceleași cifre (dar în altă ordine) ⇒numerele vor avea același rest la împărțirea cu 3 ⇒suma numerelor va fi divizibilă cu 3. Cum 3∤2021⇒ nu se poate ⇒ exact 2 numere vor fi de 3 cifre.	**2p**
Deoarece 98+897+987<2021⇒cele două numere de 3 cifre trebuie să aibă amândouă prima cifră egală cu 9	**1p**
Avem de rezolvat ecuația $x+\overline{9bc}+\overline{9cb}=2021$, unde $b<c<9$ cifre și $x\leq 98$, ⟺11(*b*+*c*)+*x*=221 Cum $x\leq 98 \Rightarrow 11(b+c)\geq 123 \Rightarrow b+c\geq 12 \Rightarrow b+c\in\{12,13,14,15\}$	**1p**
$b+c=12 \Rightarrow x=89 \Rightarrow c=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 89+948+984=2021$, deci avem soluția $x=89, y=948, z=984$	**1p**
$b+c=13 \Rightarrow x=78$, dar $7+8\neq 13$ $b+c=14 \Rightarrow x=67$, dar $6+7\neq 14$ $b+c=15 \Rightarrow x=56$, dar $5+6\neq 15$, deci soluția găsită anterior este unică	**1p**