Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x} \leq 6\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}-1$$

Veronica Grigore, profesor, Galaţi

Problema 2. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC), P \in (CD)$, $Q \in (DA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=k$, iar pe segmentele (MN), (NP), (PQ), (QM) se aleg punctele R, S, T, U astfel încât

$\frac{MR}{RN}=\frac{NS}{SP}=\frac{PT}{TQ}=\frac{QU}{UM}=l$, unde k, $l \in (0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Dacă patrulaterul $RSTU$ este paralelogram, să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

Mihai Totolici , profesor, Galaţi

Problema 3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_{\{x-1\}}|1-x|+\log_{|x-1|}\{x-1\}+[x]^{2}+2\cdot\{x\}=1+2x, \text{ unde } x \in (0,1)\cup(1,2).$$

(s-a notat : {a}= partea fracţionară a numărului real a, [a]= partea întreagă a numărului real a, $|a|=$ modulul numărului real a).

Vasile Duma, profesor, Galați

Problema 4.

Fie $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ astfel încât $\left|z^{2}+4\right|=|4z+1|$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă pentru $|z|$ şi numerele complexe z pentru care se ating aceste valori.

Iuliana Duma, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. probleme	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Inecuaţia este echivalentă cu $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}-6\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}+1\le 0$	**2p**
	Notăm cu $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}>0 \quad \Rightarrow \quad t^2-6t+1\le 0,$ care are ca soluţii $t\in\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]\Rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}$;	**3p**
	Cum funcţia exponenţială $f\left(x\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$ este strict crescătoare $\Rightarrow x\in\left[-2,2\right]$.	**2p**
2.	Fie a,b,c,d,m,n,p,q,r,s,t,u afixele punctelor de mai sus. Avem succesiv relaţiile: $m=\dfrac{a+k\cdot b}{k+1}$, $n=\dfrac{b+k\cdot c}{k+1}$, $p=\dfrac{c+k\cdot d}{k+1}$, $q=\dfrac{d+k\cdot a}{k+1}$, respectiv $r=\dfrac{m+l\cdot n}{l+1}$, $s=\dfrac{n+l\cdot p}{l+1}$, $t=\dfrac{p+l\cdot q}{l+1}$,$u=\dfrac{q+l\cdot m}{l+1}$,	**2p**
	iar din condiţia ca $RSTU$ să fie paralelogram rezultă că $r+t=u+s$, de unde $\dfrac{m+l\cdot n}{l+1}+\dfrac{p+l\cdot q}{l+1}=\dfrac{q+l\cdot m}{l+1}+\dfrac{n+l\cdot p}{l+1}$,	**2p**

	deci $m+p+l\cdot(n+q)=n+q+l\cdot(m+p)$, adică $(m+p)\cdot(1-l)=(n+q)\cdot(1-l)$, de unde, prin împărţire cu $1-l\neq 0$, rezultă că $m+p=n+q$, deci $MNPQ$ este paralelogram, iar din $\frac{a+k\cdot b}{k+1}+\frac{c+k\cdot d}{k+1}=\frac{d+k\cdot a}{k+1}+\frac{b+k\cdot c}{k+1}$, rezultă $(1-k)\cdot(a+c)=(1-k)\cdot(b+d)$, de unde $a+c=b+d$, adică $ABCD$ este paralelogram.	**3p**
3.	$\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert+\log_{\lvert x-1\rvert}\{x-1\}=-[x]^2+2\cdot[x]+1, \{x-1\}\in(0,1)$, $(\forall)x\in(0,1)\cup(1,2)$;	**2p**
	$\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert>0=\log_{\{x-1\}}1\Leftrightarrow\lvert x-1\rvert<1\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<2\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in(0,1)\cup(1,2)$; $\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert+\log_{\lvert x-1\rvert}\{x-1\}=\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert+\frac{1}{\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert}\geq 2$, (conform inegalităţii mediilor) (1) $-[x]^2+2\cdot[x]+1=2-([x]-1)^2\leq 2, (\forall)x\in(0,1)\cup(1,2)$ (2)	**3p**
	Din (1) şi (2) $\Rightarrow\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert+\frac{1}{\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert}=2=-[x]^2+2\cdot[x]+1\Rightarrow$ $\begin{cases}\log_{\{x-1\}}\lvert 1-x\rvert=1\\ [x]=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lvert 1-x\rvert=\{x-1\}\\ x\in[1,2), x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0,1)\cup(1,2)\\ x\in[1,2), x\neq 1\end{cases}\Rightarrow x\in(1,2)$.	**2p**
4.	Prin ridicare la pătrat, relaţia devine: $(z^2+4)\cdot(\overline{z^2}+4)=(4\cdot z+1)\cdot(4\cdot\overline{z}+1)\Leftrightarrow\lvert z\rvert^4+4\cdot(z^2+\overline{z^2})+16=$ $16\cdot\lvert z\rvert^2+4\cdot(z+\overline{z})+1\Leftrightarrow$ $\lvert z\rvert^4+4\cdot(z+\overline{z})^2-8\lvert z\rvert^2+16=16\cdot\lvert z\rvert^2+4\cdot(z+\overline{z})+1$; Dar $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}\,(z)\in\mathbb{R}$; $\lvert z\rvert^4-24\lvert z\rvert^2=-15+4\cdot(z+\overline{z})-4\cdot(z+\overline{z})^2$;	**3p**
	Dar $-15+4\cdot(z+\overline{z})-4\cdot(z+\overline{z})^2=-14-\left[2\cdot(z+\overline{z})-1\right]^2\leq -14$; Egalitatea se obţine pentru $\mathrm{Re}\,(z)=\frac{1}{4}$; $\lvert z\rvert^4-24\lvert z\rvert^2+14\leq 0\Leftrightarrow 12-\sqrt{130}\leq\lvert z\rvert^2\leq 12+\sqrt{130}\Leftrightarrow$ $\sqrt{12-\sqrt{130}}\leq\lvert z\rvert\leq\sqrt{12+\sqrt{130}}\Rightarrow$	**2p**

	$\max\lvert z\rvert=\sqrt{12+\sqrt{130}}$, care se realizează pentru $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{4}$ şi $(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2=12+\sqrt{130}$, adică $\mathrm{Im}(z)=\pm\sqrt{\frac{191}{16}+\sqrt{130}}$ şi $z=\frac{1}{4}\pm i\sqrt{\frac{191}{16}+\sqrt{130}}$; $\min\lvert z\rvert=\sqrt{12-\sqrt{130}}$ se atinge pentru $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{4}$ şi $(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2=12-\sqrt{130}\Rightarrow\mathrm{Im}(z)=\pm\sqrt{\frac{191}{16}-\sqrt{130}}$ şi $z=\frac{1}{4}\pm i\sqrt{\frac{191}{16}-\sqrt{130}}$;	**2p**