

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VIII-A

SOLUȚIE ȘI BAREM DE CORECTARE:

Subiectul I	Punctaj
<p>a) Din inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2$ pentru orice $a > 0$, rezultă</p> $ 10x/(5x+1) + (5x+1)/10x \geq 2$ $\Rightarrow 5x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ <p>Se verifică faptul că $x = \frac{1}{5}$ este soluție a ecuației.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b) Ecuația dată este echivalentă cu $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(x-2)^2 - 4(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, -2\}$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
Subiectul II	Punctaj
<p>a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, propoziție adevărată</p>	2p
<p>b) Folosind inegalitatea de la a) pentru ab, bc și ac și însumând, obținem:</p> $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 4 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right]$ <p>Din inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Rightarrow$</p> $\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2$, în care, înlocuind x cu $\frac{1}{a+b}$, y cu $\frac{1}{b+c}$ și z cu $\frac{1}{c+a}$, obținem succesiv: $3 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2 \Leftrightarrow$ $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 4 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2$ <p>de unde rezultă concluzia.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
Subiectul III	Punctaj
<p>Fie M și N mijloacele segmentelor $[CD]$ și $[BD]$, $AF \perp BC$ și $IL \perp BC \Rightarrow IL = r$</p> $\frac{AG}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AG'}{AM} \Rightarrow GG' \parallel MN \Rightarrow GG' \parallel (BCD) \text{ (1)}$ $A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AF}{2} = \frac{(AB+BC+CA) \cdot IL}{2}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

Folosind faptul că $2BC = AB + AC$ în relația de mai sus obținem: $AF = 3IL$	1p
Fie $K \in (AF)$ astfel încât $KF = IL \Rightarrow KFLI$ este dreptunghi și	
$\frac{AK}{AF} = \frac{AG}{GN} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK \parallel FN \Rightarrow GK \parallel (BCD)$ (2)	1p
Din relațiile (1) și (2) rezultă că $(GG'K) \parallel (BCD)$	
Din $KFLI$ dreptunghi $\Rightarrow KI \parallel BC \Rightarrow KI \parallel (BCD)$	1p
$\Rightarrow KI \subset (GG'K) \Rightarrow (GG'I) \parallel (BCD)$	1p

Subiectul IV	Punctaj
a. Dacă $d = \sqrt{ab + ac + bc} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Rightarrow$ $\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow$ paralelipipedul este cub. Reciproc, dacă $ABCD A'B'C'D'$ este cub $\Rightarrow a = b = c \Rightarrow$ are loc egalitatea din enunț	2p
b. $\Rightarrow ABCD A'B'C'D'$ - dreptunghi cu diagonalele perpendiculare \Rightarrow pătrat $\Rightarrow a = c$. Analog se demonstrează că $b = c$, deci paralelipipedul dreptunghic este cub. Reciproc, dacă $ABCD A'B'C'D'$ este cub rezultă imediat relația din enunț.	2p
c. $\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4 + c^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4 + a^4}{c^3 + a^3} = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$ $\frac{2(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2} - a^2 - b^2 + \frac{2(b^4 + c^4)}{b^2 + c^2} - b^2 - c^2 + \frac{2(c^4 + a^4)}{c^2 + a^2} - c^2 - a^2 = 0$ $\Rightarrow \frac{[(a^2 - b^2)^2]}{a^2 + b^2} + \frac{[(b^2 - c^2)^2]}{b^2 + c^2} + \frac{[(c^2 - a^2)^2]}{c^2 + a^2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 = (b^2 - c^2)^2 = (c^2 - a^2)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow ABCD A'B'C'D'$ cub Reciproc, dacă $a = b = c \Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2$ Așadar, toate cele trei afirmații din enunț sunt echivalente cu propoziția "Paralelipipedul este cub", deci sunt echivalente între ele.	2p
	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VIII-A

SUBIECTE

I. Rezolvați ecuațiile:

$$\text{a) } \left| \frac{10x}{5x+1} \right| + \left| \frac{5x+1}{10x} \right| + |5x-1| = 2, \quad x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{5}, 0 \right\}$$

$$\text{b) } x^3 - 4x + 4 = \frac{x^4}{4} \quad (\text{RMT 1/2013})$$

II. Demonstrați inegalitățile următoare pentru orice numere strict pozitive a, b, c:

$$\text{a) } \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$$

$$\text{b) } 3 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2$$

III. Fie ABCD patru puncte necoplanare astfel încât BC este media aritmetică a lungimilor segmentelor AB și AC. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD, G' centrul de greutate al triunghiului ACD, iar I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Demonstrați că $(IGG') \parallel (BCD)$.

IV. Un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' are dimensiunile $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ și diagonala $AC' = d$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

$$\text{a. } d = \sqrt{ab + ac + bc}$$

$$\text{b. } AC' \perp (A'DB)$$

$$\text{c. } \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2} = d^2$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: trei ore

Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.