OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 16 februarie 2013
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Fie numerele $a,b,x,y\in(0,+\infty)$ în relaţia de ordine $a\le x\le y\le b$. Să se arate că:

a) $\frac{a}{b}\le\frac{x}{y}\le\frac{y}{x}\le\frac{b}{a}$; b) $\left(a^2+b^2\right)xy\ge ab\left(x^2+y^2\right)$.

Gheorghe Marchitan, Suceava

Soluţie. a) Avem $y\le b\Leftrightarrow\frac{1}{b}\le\frac{1}{y}$ şi $a\le x$, de unde rezultă $\frac{a}{b}\le\frac{x}{y}$ (1).

$x\le y\Rightarrow\frac{x}{y}\le1\le\frac{y}{x}(2)$. Din inegalitatea $a\le x\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le\frac{1}{a}$ şi $y\le b$ rezultă $\frac{y}{x}\le\frac{b}{a}$(3). Din cele trei relaţii obţinem concluzia.

b) Din inegalităţile de la punctul precedent avem $ay-bx\le0$ şi $ax-by\le0$. Obţinem $(ay-bx)(ax-by)\ge0$, ceea ce ne conduce la $a^2xy-aby^2-abx^2+b^2xy\ge0\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)xy\ge ab\left(x^2+y^2\right)$.

Barem.

a) Demonstrează $\frac{a}{b}\le\frac{x}{y}$ …………………………………………………..................................	1p
Demonstrează $\frac{x}{y}\le\frac{y}{x}$	1p
Demonstrează $\frac{y}{x}\le\frac{b}{a}$ ……………………………………………………….…………….	1p
b) Deducerea inegalităţii ……………………………………………………………………..	4p

2. Să se determine funcţiile $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ştiind că:

a) $f(0)=0$ şi $f(n)\ne0$ pentru orice număr natural nenul n;

b) $n^2f(n)+m^2f(m)=\left(f^2(n)+f^2(m)-f(n)\cdot f(m)\right)\cdot g(m+n)$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{N}$.

Cristian Amorăriţei, Suceava

Soluţie. În relaţia de la punctul b) luăm *m=0* şi obţinem:

$n^2f(n)=f^2(n)g(n)\Leftrightarrow f(n)\left(n^2-f(n)g(n)\right)=0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow g(n)=\frac{n^2}{f(n)},\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1).

$g(1)f(1)=1,g(1),f(1)\in\mathbb{N}\Rightarrow g(1)=f(1)=1.$

În relaţia de la punctul b) luăm *m=1* şi obţinem: $n^2f(n)+1=\left(f^2(n)+1-f(n)\right)\cdot g(n+1),\forall n\in\mathbb{N}$. Folosind (1) deducem: $n^2f(n)+1=\left(f^2(n)+1-f(n)\right)\cdot\frac{(n+1)^2}{f(n+1)},\forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$f(n+1)=\left(f^2(n)+1-f(n)\right)\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2f(n)+1},\forall n\in\mathbb{N}$. Se demonstrează folosind metoda inducţiei matematice că $f(n)=n,\forall n\in\mathbb{N}$. În final rezultă $g(n)=\begin{cases}a,n=0\\ n,n\ge1\end{cases},a\in\mathbb{N}$.

Barem.

Obţine $g(n)=\frac{n^2}{f(n)},\forall n\in\mathbb{N}^*$ …………………………………………………………………	2p
Deduce $g(1)=f(1)=1$ …………………………………………………………………	1p
Demonstrează $f(n+1)=\left(f^2(n)+1-f(n)\right)\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2f(n)+1},\forall n\in\mathbb{N}$ ………………….	2p
Determină funcţia *f*………..……………………	1p

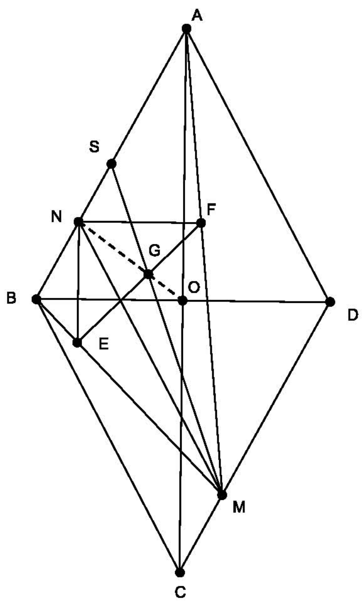
Determină funcţia g…………………………………………………………………..	1p

3. Fie rombul $ABCD$ de centru O şi punctul $N\in(AB)$. Prin N se construieşte o dreaptă paralelă cu BC care intersectează dreapta DC în M. Construim prin N o paralelă la AC care intersectează MB în E şi o paralelă la DB care intersectează MA în F. Notăm cu S mijlocul segmentului $[AB]$ şi $MS\cap EF=\{G\}$. Demonstraţi că:

a) $\dfrac{EB}{EM}+\dfrac{FA}{FM}=1$; b) G este centrul de greutate al triunghiului ABM; c) $2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{GN}$.

Anca Andrei, Suceava

Soluţie. a) Deoarece $NE\parallel AC$ şi $ABCD$ este romb rezultă că $\sphericalangle BNE\equiv\sphericalangle MNE$. Din teorema bisectoarei avem $\dfrac{EB}{EM}=\dfrac{NB}{NM}$. Analog se demonstrează că $\sphericalangle ANF\equiv\sphericalangle MNF$ şi din teorema bisectoarei avem $\dfrac{FA}{FM}=\dfrac{NA}{NM}$. Adunând cele două egalităţi obţinem că $\dfrac{EB}{EM}+\dfrac{FA}{FM}=1$.



b) Demonstrăm că dreapta EF trece prin centrul de greutate al ΔAMB şi cum EF intersectează mediana $[MS]$ în punctul G va rezulta că G este centrul de greutate al ΔAMB. Notăm $\dfrac{EB}{EM}=u\Rightarrow\overrightarrow{ME}=\dfrac{1}{1+u}\cdot\overrightarrow{MB}$ şi $\dfrac{FA}{FM}=v\Rightarrow\overrightarrow{MF}=\dfrac{1}{1+v}\cdot\overrightarrow{MA}$, iar $u+v=1$. Fie G_1 centrul de greutate al $\Delta AMB\Rightarrow\overrightarrow{MG_1}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{1+v}{3}\overrightarrow{MF}+\dfrac{1+u}{3}\overrightarrow{ME}$, cu $\dfrac{1+v}{3}+\dfrac{1+u}{3}=1$, de unde rezultă că punctele F,E,G_1 sunt coliniare. Prin urmare avem că $G=G_1$.

c) $\dfrac{NB}{NM}=u\Rightarrow\dfrac{NB}{NA}=\dfrac{u}{1-u}\Rightarrow\overrightarrow{ON}=u\cdot\overrightarrow{OA}+(1-u)\cdot\overrightarrow{OB}$.

$\dfrac{MC}{MD}=\dfrac{NB}{NA}=\dfrac{u}{1-u}\Rightarrow\overrightarrow{OM}=u\cdot\overrightarrow{OD}+(1-u)\cdot\overrightarrow{OC}=(u-1)\cdot\overrightarrow{OA}-u\cdot\overrightarrow{OB}$.

Deoarece G este centrul de greutate al $\Delta AMB\Rightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(u-1)\cdot\overrightarrow{OA}-u\cdot\overrightarrow{OB}=u\cdot\overrightarrow{OA}+(1-u)\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}\Rightarrow 2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{GN}$.

Barem.

a) Demonstrează $\dfrac{EB}{EM}=\dfrac{NB}{NM}$ şi $\dfrac{FA}{FM}=\dfrac{NA}{NM}$ …………………………………………………	2p
Finalizare $\dfrac{EB}{EM}+\dfrac{FA}{FM}=1$ ………………………………………………………………	1p
b) Demonstrează că G este centrul de greutate al triunghiului ABM ……………………………	2p
c) Demonstrarea cerinţei …………………………………………………………………..	2p

4. Fie triunghiul neisoscel ABC, P un punct în interiorul triunghiului, AP∩BC={D}, BP∩AC={E}, CP∩AB={F}. Se consideră $D_1\in(AB)$ şi $D_2\in(AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢ADB şi ∢ADC, $E_1\in(BC)$ şi $E_2\in(BA)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢BEC şi ∢BEA, iar $F_1\in(CA)$ şi

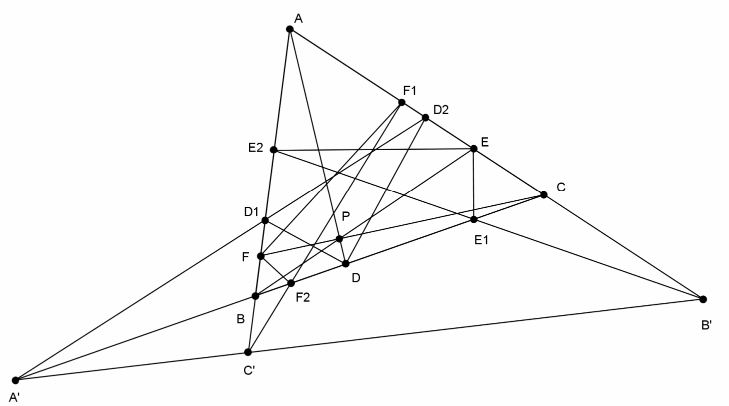
$F_2 \in (CB)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢CFA şi ∢CFB. Dacă $\{A'\} = D_1D_2 \cap BC$,

$\{B'\} = E_1E_2 \cap AC$ şi $\{C'\} = F_1F_2 \cap AC$, să se arate că A', B', C' sunt puncte coliniare.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie.

Condiţia AB≠BC≠CA≠AB, teorema bisectoarei şi axioma Pasch asigură determinarea punctelor $A' \in BC - [BC]$, $B' \in AC - [AC]$ şi $C' \in AB - [AB]$. Fixăm cazul $B \in (A'C)$. Se aplică teorema Menelaus triunghiului ABC şi transversalei A'—D₁—D₂ şi se obţine $\frac{A'B}{A'C} = \frac{D_2A}{D_2C} \cdot \frac{D_1B}{D_1A} \overset{th.bis.}{=} \frac{AD}{DC} \cdot \frac{DB}{AD} = \frac{DB}{DC}$, adică A' şi D sunt puncte conjugate armonic în raport cu B şi C. Analog mai obţinem relaţiile: $\frac{B'C}{B'A} = \frac{EC}{EA}$ şi $\frac{C'A}{C'B} = \frac{FA}{FB}$. Din teorema lui Ceva şi reciproca teoremei Menelaus, se deduce $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, de unde concluzia problemei.



Barem.

Realizarea unui figuri corespunzătoare……………………………………………………….	1p
Aplică teorema Menelaus triunghiului ABC şi transversalei A'-D_1-D_2 ………………….....	1p
Aplică teorema bisectoarei în triunghiurile ADC, respectiv ADB…………………….….	1p
Deduce $\frac{A'B}{A'C} = \frac{D_2A}{D_2C} \cdot \frac{D_1B}{D_1A} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{DB}{AD} = \frac{DB}{DC}$ ……………………………………………...….	1p
Analog scrie relaţiile : $\frac{B'C}{B'A} = \frac{EC}{EA}$ şi $\frac{C'A}{C'B} = \frac{FA}{FB}$.…………………………………….....	1p
Din teorema lui Ceva $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$ ………..………………………………………….	1p
Deduce $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, de unde concluzia problemei.	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a IX-a

1. Fie numerele $a, b, x, y \in (0, +\infty)$ în relaţia de ordine $a \le x \le y \le b$. Să se arate că:

a) $\frac{a}{b} \le \frac{x}{y} \le \frac{y}{x} \le \frac{b}{a}$; b) $(a^2 + b^2)xy \ge ab(x^2 + y^2)$.

2. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ştiind că:

a) $f(0) = 0$ şi $f(n) \ne 0$ pentru orice număr natural nenul n;

b) $n^2 f(n) + m^2 f(m) = \left(f^2(n) + f^2(m) - f(n) \cdot f(m)\right) \cdot g(m+n)$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Fie rombul $ABCD$ de centru O şi punctul $N \in (AB)$. Prin N se construieşte o dreaptă paralelă cu BC care intersectează dreapta DC în M. Construim prin N o paralelă la AC care intersectează MB în E şi o paralelă la DB care intersectează MA în F. Notăm cu S mijlocul segmentului $[AB]$ şi $MS \cap EF = \{G\}$. Demonstraţi că:

a) $\frac{EB}{EM} + \frac{FA}{FM} = 1$; b) G este centrul de greutate al triunghiului ABM; c) $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GN}$.

4. Fie triunghiul neisoscel ABC, P un punct în interiorul triunghiului, AP∩BC={D}, BP∩AC={E}, CP∩AB={F}. Se consideră $D_1 \in (AB)$ şi $D_2 \in (AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢ADB şi ∢ADC, $E_1 \in (BC)$ şi $E_2 \in (BA)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢BEC şi ∢BEA, iar $F_1 \in (CA)$ şi $F_2 \in (CB)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢CFA şi ∢CFB. Dacă $\{A'\} = D_1D_2 \cap BC$, $\{B'\} = E_1E_2 \cap AC$ şi $\{C'\} = F_1F_2 \cap AC$, să se arate că A', B', C' sunt puncte coliniare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.