



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI



MINISTERUL EDUCAȚIEI



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Pe mulțimea $M = [1, \infty)$ se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = \log_3(3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12).$$

a) Arătați că $x * y = \log_3((3^x - 3)(3^y - 3) + 3)$ pentru orice $x, y \in M$.

b) Să se rezolve în mulțimea M ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x} = x$.

c) Pe o tablă sunt scrise numerele $\frac{\sqrt{50}}{4}, \frac{\sqrt{49}}{4}, \frac{\sqrt{48}}{4}, \dots, \frac{\sqrt{16}}{4}$. Se șterg două numere a și b și în locul lor se trece numărul $a * b$. Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

Subiectul 2.

Se consideră polinomul $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \in \mathbb{R}[X], n \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = (X-1)^2$.

b) Fie funcția $g: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{(x-1)^2}$, unde $\tilde{f}(x)$ este funcția polinomială asociată polinomului f . Determinați primitiva funcției g al cărei grafic conține punctul $M(2, 2^{n+1})$.

Subiectul 3.

$$\text{Fie } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx \text{ și } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx.$$

a) Demonstrați că $2I + 3J = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculați valoarea integralei J .

c) Să se arate că $I \leq \frac{\pi}{4}$.

Subiectul 4.

Costul total de cumpărare și întreținere al unui aparat medical pentru x ani ($x > 1$) este modelat prin funcția $C(x) = 4000(30 + \int_0^x t \cdot 3^t dt)$, (exprimată în RON).

a) Calculați costul total pentru patru ani de folosire a aparatului (aproximați $\ln 3$ cu 1).

b) După câți ani de folosire a aparatului suma cheltuită este egală cu $4000(729x - 698)$.

Notă:

Timp de lucru 3 ore;

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.