Inspectoratul Şcolar al Judeţului
Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice
Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a XII-a

1. Calculaţi
$$\int\left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^{3}+1}dx.$$

2. Pe o mulţime M este definită o lege de compoziţie asociativă, cu proprie-tatea
$$(xy)^{2016}=yx,$$
pentru orice x, y. Arătaţi că legea este comutativă.

3. Arătaţi că dacă integrala
$$\int_{0}^{a}\cos^{3}\left(\pi x+\pi t\right)dt$$
nu depinde de $x\in\mathbb{R}$, atunci a este un număr întreg par.

4. Fie G un grup finit. Arătaţi că pentru orice elemente x, y din G are loc
$$\operatorname{ord}(xy)=\operatorname{ord}(yx).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016
Soluţii şi bareme
Clasa a XII-a

1. Calculaţi
$$\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^3+1}dx.$$

Soluţie. Avem
$$\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^3+1}dx = \int \left(3x^{8}+2x^{5}\right)\sqrt[3]{x^6\left(x^3+1\right)}dx$$
$$= \int \left(3x^{8}+2x^{5}\right)\sqrt[3]{x^9+x^6}dx.$$
.... 3p
Dacă notăm $x^9+x^6=t$, avem $\left(9x^8+6x^5\right)dx=dt$, sau $\left(3x^8+2x^5\right)dx=\frac{1}{3}dt$. 2p
Integrala devine
$$\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}dt=\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}}+\mathcal{C},$$
de unde
$$\int \left(3x^{10}+2x^{7}\right)\sqrt[3]{x^3+1}dx=\frac{1}{4}\left(x^9+x^6\right)^{\frac{4}{3}}+\mathcal{C}.$$
.... 2p

2. Pe o mulţime M este definită o lege de compoziţie asociativă, cu proprie-tatea
$$(xy)^{2016}=yx,$$
pentru orice x,y. Arătaţi că legea este comutativă.
Soluţie. Punem n în loc de 2016. Avem $(xy)^n=yx$, de unde $\left((xy)^n\right)^n=(yx)^n=xy$. 3p
Pe de altă parte, $\left((xy)^n\right)^n=\left((xy)^{n-1}(xy)\right)^n=(xy)(xy)^{n-1}=(xy)^n=yx$, de unde concluzia 4p

3. Arătaţi că dacă integrala
$$\int_0^a \cos^3\left(\pi x+\pi t\right)dt$$
nu depinde de $x\in\mathbb{R}$, atunci a este un număr întreg par.
Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x+t=u$. Obţinem
$$\int_0^a \cos^3\left(\pi x+\pi t\right)dt=\int_x^{x+a}\cos^3\left(\pi u\right)du.$$
.... 2p
Fie $F(u)$ o primitivă a funcţiei $f(u)=\cos^3(\pi u)$. Atunci
$$\int_x^{x+a}\cos^3\left(\pi u\right)du=F(x+a)-F(x).$$
.... 2p
Dacă integrala nu depinde de x, atunci $\left(F(x+a)-F(x)\right)'=0$ (derivarea se face după variabila x), de unde
$$\cos^3\left(\pi x+\pi a\right)=\cos^3\left(\pi x\right),$$
pentru orice x. 2p
Pentru $x=0$, obţinem $\cos^3(\pi a)=1$, deci $\cos(\pi a)=1$, de unde $\pi a=2k\pi$, cu k întreg. 1p

4. Fie G un grup finit. Arătaţi că pentru orice elemente x, y din G are loc

$$\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord}(yx).$$

Soluţie. Deoarece G este finit, orice element are ordin finit. Fie $x, y \in G$ şi $n = \operatorname{ord}(xy)$, $m = \operatorname{ord}(yx)$.
Deducem că $(xy)^n = e$, de unde $x(yx)^{n-1}y = e$ 3p
Dar $x(yx)^{n-1}y = e$ implică $(yx)^{n-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1}$, de unde $(yx)^n = e$, ceea ce implică $\operatorname{ord}(yx) \leq n$, adică $m \leq n$ 3p
Similar obţinem $n \leq m$, deci $m = n$ 1p