Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VII-a

1) Un trapez *ABCD* cu $m(\hat{A}) = 90°$; $AB \parallel CD$ şi $CD<AD<BC<AB$ are perimetrul de 18 cm, iar lungimile laturilor sale sunt exprimate prin 4 numere naturale consecutive.

a) Să se afle aria trapezului *ABCD*.

b) Calculaţi distanţa de la punctul *A* la dreapta *BC*.

c) Dacă $AD \cap BC = \{P\}$, *M* mijlocul lui *(AB)* şi $PM \cap AC = \{S\}$, determinaţi raportul ariilor triunghiurilor *ASM* şi *ASP*.

Gal Ana – Şc. Gimn. Apa

2) Fie $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + . . . + 2^{2013}$.

a) Calculaţi numărul $a + 1$.

b) Determinaţi valoarea expresiei $\sqrt{a + 2\sqrt{a+1} + 2}$.

c) Determinaţi $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{a+k}{14} \in \mathbb{N}$.

Amic Monica – Lic. de Artă

3) Un călător, situat în punctul *A*, îşi propune să parcurgă o distanţă *AB*. În prima zi parcurge o doime din o treime din această distanţă, a doua zi parcurge o treime din o pătrime din distanţa totală, a treia zi parcurge o pătrime din o cincime din distanţa *AB*, şi tot aşa. Notăm cu *C* mijlocul segmentului *AB*, cu M_1 mijlocul segmentului *AC* şi pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ notăm cu M_n mijlocul segmentului $M_{n-1}C$.

a) După câte zile ajunge călătorul în punctul M_2? Dar în punctul M_4?

b) După câte zile ajunge călătorul în punctul M_n, unde $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$?

Dacă *AB*=100 km, după câte zile ajunge călătorul la o distanţă de cel mult un kilometru faţă de punctul *C*?

c) După câte zile ajunge călătorul în punctul *C*?

Marciuc Daly – Col. Naţ. „Mihai Eminescu”

4) În triunghiul *ABC* cu $AB \neq AC$, există $M, N \in (BC)$ astfel încât $N \in (BM)$, $M \in (NC)$ şi $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ANB} \equiv \widehat{AMC}$. Bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$, taie *AM*, respectiv *AN* în punctele *X* şi *Y*. Dacă $XY \parallel BC$, atunci

a) Arătaţi că $\frac{CN}{AC} = \frac{BM}{AB}$.

b) Arătaţi că triunghiul *AMN* este isoscel.

c) Determinaţi $m(\widehat{BAC})$.

Braica Petru – Şc. Gimn. „Grigore Moisil”

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1. $CD = x, P_{ABCD} = 4x + 6$ (1 punct)

$x = 3$ (1 punct)

$A_{ABCD} = 18\text{ cm}^2$ (1 punct)

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{BC \cdot h_1}{2} = \dfrac{AB \cdot h_2}{2} = 12$ (1 punct)

$d(A, BC) = \dfrac{24}{5}$ (1 punct)

S centru de greutate în triunghiul *PAB*. (1 punt)

$\dfrac{A_{ASM}}{A_{ASP}} = \dfrac{SM}{SP} = \dfrac{1}{2}$ (1 punct)

Problema 2. $a + 1 = 2^{2014}$ (3 puncte)

$\sqrt{a + 2\sqrt{a+1} + 2} = 2^{1007} + 1$ (2 puncte)

Restul împărțirii lui *a* la 14 este 1. (1 punct)

$k = 14s + 13, s \in \mathbb{N}$ (1 punct)

Problema 3.

După 6 zile călătorul ajunge în M_2. (2 puncte)

După 30 de zile călătorul ajunge în M_4. (1 punct)

După $2^{n+1} - 2$ zile călătorul ajunge în M_n. (2 puncte)

După 98 de zile călătorul ajunge la 1 km de punctul *C*. (1 punct)

Dacă $AB=d$, în *k* zile călătorul va parcurge distanța

$AS_k = \left(\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)d = \dfrac{k}{2(k+2)}d$, $AS_k \geq AC \Leftrightarrow \dfrac{k}{2(k+2)} \geq \dfrac{1}{2}$,

relație imposibilă. (1 punct)

Problema 4. $\dfrac{CN}{AC} = \dfrac{NY}{YA} = \dfrac{MX}{XA} = \dfrac{BM}{AB}$ (3 puncte)

$AN = AM$ (2 puncte)

$m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ (2 puncte)