MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 21.02.2016 -

CLASA a X-a
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN/ PEDAGOGIC
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

a) Ordonați crescător numerele $3a$, $2b$, $|a-b|$, unde $a=2^{3^2}$ și $b=2^{2^3}$.

b) Fie intervalul $I=(log_2 15, log_3 82)$. Calculați $I\cap\mathbb{N}$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $3a=3\cdot 2^9$, $2b=2\cdot 2^8=2^9$	2p
$\lvert a-b\rvert=a-b=2^8$	1p
$\lvert a-b\rvert<2b<3a$	1p
b) $3<\log_2 15<4<\log_3 82<5$	2p
$I\cap\mathbb{N}=\{4\}$	1p

Enunţ subiect 2

Considerăm expresia $E(x)=\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{-x^2+2\sqrt{2}x-2}$.

a) Determinați mulțimea D a valorilor lui x pentru care $E(x)$ este corect definită.

b) Calculați $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$ în cazul în care $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\in D$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\left(x-\sqrt{2}\right)^3\geq 0\Leftrightarrow x-\sqrt{2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq\sqrt{2}$ $D=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$	2p
b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\in D$	1p
$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=E\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)^2}=1-1=0$	4p

Enunţ subiect 3

a) Calculați $ln\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\right)+ln\left(\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)$, unde $a,b\in(0,+\infty)$.

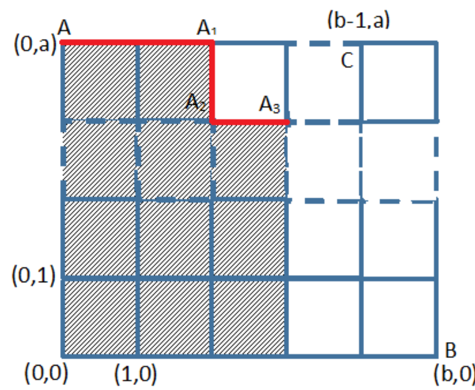
b) Fie $a,b>0$ astfel încât $a^2+b^2=8ab$. Arătați că $\frac{1}{2}(lg\,a+lg\,b+1)=lg\,(a+b)$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $ln\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\right)+ln\left(\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)=ln\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=$	2p
$=ln\left(\sqrt{(x-y)^2}\right)=ln\lvert x-y\rvert$	1p
b) $(a+b)^2=10ab$ și $a+b>0\Rightarrow\sqrt{ab}=\frac{a+b}{\sqrt{10}}\Rightarrow lg\sqrt{ab}=lg\frac{a+b}{\sqrt{10}}\Rightarrow$	3p
$\Rightarrow\frac{1}{2}(lg\,a+lg\,b)=lg\,(a+b)-lg\sqrt{10}$ de unde rezultă egalitatea din enunț.	1p

Enunţ subiect 4

Alexa lucrează la un joc bazat pe animaţie pe calculator. Un personaj se poate deplasa pe grila din figura alăturată numai de-a lungul liniilor astfel: pe orizontală spre dreapta sau pe verticală în jos. Fiecare *pas* are lungimea egală cu unitatea. La fiecare mişcare cu un *pas* orizontal se acumulează un punctaj egal cu aria dreptunghiului format sub *pas* şi nu se acumulează niciun punct dacă *pasul* este vertical.

De exemplu, dacă $a=4$, pentru deplasarea pe traseul $A-A_1-A_2-A_3$ s-au făcut 4 *paşi* şi punctajul obţinut este $4+4+0+3=11$. (Corespunde în figură ariei suprafeţei haşurate).



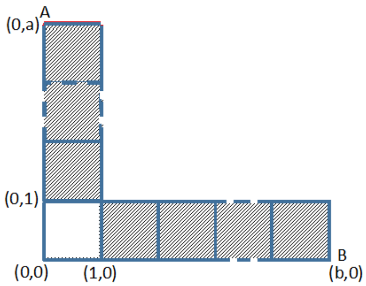
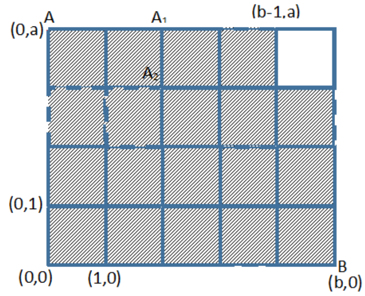
Acest personaj se află inițial în punctul $A(0;a)$ și trebuie să ajungă în punctul $B(b;0)$, unde $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0;1;2\}$.

a) Aflaţi câţi *paşi* trebuie să facă personajul pentru a ajunge din *A* în *B*. Câte rezultate diferite există?

b) Alexa plasează un obstacol insurmontabil în punctul $C(b-1;a)$ și astfel acest punct devine inaccesibil. Care este punctajul maxim pe care îl poate obține personajul în acest caz ?

c) Arătaţi că $a+b\le ab$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) Orice traseu presupune *b paşi* orizontali și *a paşi* verticali deci are lungimea $L=a+b$ care este constantă.	3p
b) Din punctul $D(b-2;a)$ personajul se poate deplasa doar pe verticală în jos. $ab-2$ este punctajul maxim.	2p
c) *Grafic*: aria $a+b-1$ (figura din stânga) este mai mica decât aria $ab-1$ (figura din dreapta), cu egalitate pentru $a=b=2$.	2p

  (Soluție alternativă - *Algebric*: $a+b\le ab \Leftrightarrow 1\le ab-a-b+1 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)\ge 1$ adevărat pentru orice $a,b\in\mathbb{N}$, $a,b\ge 2$)	